

Calculer sa limite.

1°) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $\frac{1}{2} < u_n < 3$
b) Montrer que u est croissante. En déduire qu'elle est convergente et2°) a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a $0 < 3 - u_{n+1} \leq \frac{2}{5} (3 - u_n)$
b) En déduire que pour tout n de $\mathbb{N}$ on a $0 < 3 - u_n \leq 3 \left(\frac{2}{5}\right)^n$. Retrouverla limite de la suite u
3°) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ $V_n = n(3 - u_n)$.a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ on a $\frac{V_{n+1}}{V_n} \leq \frac{2}{5} \left(\frac{n+1}{n}\right)$ puis $\frac{V_{n+1}}{V_n} \leq \frac{4}{5}$
b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ on a : $V_n \leq \left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}$ 4°) a) $\forall n \in \mathbb{N}^*$ on pose $S_n = \sum_{k=1}^n k u_k$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$
on a : $0 \leq 3n \left(\frac{n+1}{2}\right) - S_n \leq 5 \left(1 - \left(\frac{4}{5}\right)^n\right)$ b) En déduire $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n^2}$ Ex2) On définit deux suites U et V par $U_0 = 1$, $V_0 = 2$ et pour tout n de $\mathbb{N}$
 $U_{n+1} = \frac{2U_n V_n}{U_n + V_n}$ et $V_{n+1} = \frac{U_n + V_n}{2}$ 1°) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ $0 < U_n < V_n$ 2°) a) Montrer que U est croissante et que V est décroissante.
b) En déduire que U et V sont convergentes3°) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ $V_{n+1} - U_{n+1} \leq \frac{1}{2} (V_n - U_n)$
b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ $V_n - U_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$ 4°) Montrer que U et V sont adjacentes5°) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ $U_n V_n = 2$ En déduire $\lim_{n \rightarrow \infty} U_n$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} V_n$.Ex3) On définit deux suites réelles U et V définies sur $\mathbb{N}$ par
 $U_0 = a$, $V_0 = b$ avec $0 < a < b$ et $\forall n \in \mathbb{N}$ $U_{n+1} = \frac{U_n + V_n}{2}$, $V_{n+1} = \sqrt{\frac{(U_n + V_n)}{2} V_n}$ 1°) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ $0 < U_n < V_n$ 2°) Montrer que U est croissante et que V est décroissante. En déduire qu'elles sont convergentes.3°) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ $V_{n+1} - U_{n+1} \leq \frac{1}{2} (V_n - U_n)$ 4°) Montrer que U et V sont adjacentes et ont la même limite l
et que $l \in [a, b]$ Ex4) Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par son premier terme u_0 et par $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_{n+1} = \frac{u_n^2}{u_n + 1}$ 1°) Montrer que la suite u est croissante.2°) Montrer que si (u_n) est convergente alors sa limite est nulle3°) Montrer que si $u_0^2 + u_0 > 0$ alors la suite (u_n) diverge4°) Montrer par récurrence que si $u_0^2 + u_0 < 0$ alors $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $-1 < u_n < 0$
Conclure sur la convergence de la suite (u_n)