CHABCHOUB Taïeb
D: 74 292 291 - B: 74 402 788
P: 98 251 593 - 20 251 593

Série N° 13 4° Math

Ex 1) 1°) Montrer que pour tout naturel $n \geq 1$ on a : $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$

2°) Soit la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par : $U_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}$

a) Montrer que pour tout $n \geq 1$ $U_n = \sqrt{n+1} - 1$

b) En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$

3°) Soit la suite $(V_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par : $V_n = \dfrac{U_n}{\sqrt{n+1}}$

a) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} V_n$

b) Montrer que la suite (V_n) est croissante

4°) Soit la suite (W_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $\begin{cases} W_1 = 2 \\ W_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(W_n + \dfrac{1}{W_n}\right) \text{ pour tout } n \geq 1 \end{cases}$

a) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ $W_n \geq 1$

b) Montrer que (W_n) est une suite décroissante.

c) En déduire que la suite (W_n) est convergente. Déterminer alors $\lim\limits_{n \to +\infty} W_n$

5°) Montrer que les suites (V_n) et (W_n) sont adjacentes.

Ex 2) 1°) Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = 2 + \dfrac{3}{x}$

Déterminer le sens de variation de f et de $f \circ f$ sur $\mathbb{R}_+^*$

2°) Soit la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} U_0 = a \quad (a \in \mathbb{R}_+^*) \\ U_{n+1} = 2 + \dfrac{3}{U_n} \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

Déterminer a pour que la suite (U_n) soit constante.

<u>Pour la suite de l'exercice on suppose que $a = 2$</u>

3°) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$ $U_n \geq 2$

4°) Soient la suite V définie sur $\mathbb{N}$ par $V_n = U_{2n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

et la suite W définie sur $\mathbb{N}$ par $W_n = U_{2n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

a) Vérifier que $\forall n \in \mathbb{N}$ $V_{n+1} = (f \circ f)(V_n)$

b) Montrer que la suite V est majorée par 3.

c) Montrer que la suite V est croissante. En déduire que V est convergente. En déduire que V est bornée et déterminer sa limite.

5°) En remarquant que $W_n = f(V_n)$, montrer que W est convergente et déterminer sa limite.

6°) Montrer que les deux suites V et W sont adjacentes. En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$

7°) a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$. $|U_{n+1} - 3| \leq \dfrac{1}{2}|U_n - 3|$

b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ $|U_n - 3| \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$. Retrouver alors la limite de (U_n)

8°) Soit la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par $S_n = \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} U_k$.

Montrer que (S_n) converge vers 3