| LYCEE PILOTE SFAX | Série d'exercices N° | Mr MEGDICH |
|---|---|---|
| | | 4ème MATH |

## EXERCICE N°1

On considère la famille des fonctions $f_n$ définies par : $f_n : x \mapsto x^n \sqrt{2-x}$ pour tout entier naturel non nul n ; on note $(C_n)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1) Etudier la dérivabilité à gauche de $f_n$ en 2
2) Montrer que toutes les courbes $(C_n)$ passent par trois points fixes
3) a) Etudier $f_1$ et tracer sa courbe $(C_1)$ (on précisera la tangente au point d'abscisse 0)
   b) Représenter à partir de $(C_1)$ la courbe (C') de la fonction définie par $h(x) = |x|\sqrt{2-x}$
4) Soit n un entier naturel supérieur où égale à 2
   Dresser le tableau de variation de fn (On distinguera les cas où n est pair et n est impair)

## EXERCICE N°2

Soit n un entier naturel non nul et différent de 1 ;on considère la fonction $f_n$ définie sur $IR_+$ par $f_n(x) = x^n + x - \frac{1}{2}$

1) Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha_n$ dans $\left]0,\frac{1}{2}\right[$

2) a)Montrer que $f_{n+1}(\alpha_n) = \alpha_n{}^n(\alpha_n - 1)$

b) Montrer que la suite $\alpha_n$ est croissante et déduire qu'elle converge

3)a) Montrer que pour tout $n \geq 2$ ; $(\alpha_n)^n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$

b) Déduire que $\alpha_n$ converge vers $\frac{1}{2}$

4) Pour tout n de $\mathbb{N}^*\setminus\{1\}$ on pose $u_n = (\alpha_2)^2 + (\alpha_3)^3 + (\alpha_4)^4 + .......... + (\alpha_{n+1})^{n+1}$

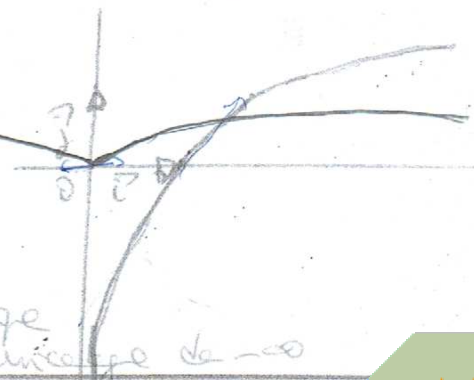
a) Montrer que $u_n \leq \frac{1}{2}\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$ Déduire que $u_n$ est convergente vers un réel l et que $1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \leq l \leq \frac{1}{2}$

5) calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n}(\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + .......\alpha_{n+1})$

## EXERCICE N°3

On donne la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ dont la représentation graphique dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ est la courbe $\zeta$ représenté ci contre

1) calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$ , $\lim\limits_{x \to 1} \frac{f(x)}{x-1}$, $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{f(\sin x)}{x - \frac{\pi}{2}}$, puis dresser le tableau de variation de f



Dans la suite de l'exercice on donne $f'(x) = \frac{1}{x}$ pour $x \in ]0,+\infty[$

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par g(x)= $f(1+x^2)$

2) a)Montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}$

b) dresser le tableau de variation de g

c)tracer la courbe de g ( [illegible] branche parabolique de direction $(O,\vec{i})$ au voisinage de $-\infty$ )