Lycée pilote de Bizerte	Serie d'exercices n°6 4éme Math	Prof:M.Benali

Exercice 1 :

Indiquer la bonne réponse pour chacune des questions suivantes :

1)La suite de terme général $\frac{(-1)^n n}{1+n^2}$ à pour limite :

a)-1 b)0 c)1

2)Soit u une suite tel que (u_{2n}) converge vers 2 alors:

a)u converge vers 2 b)u est divergente c)(u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont adjacentes

3)u et v deux suites tels que : $u_n \le v_n$, $u_n \ge 0$ *et v décroissante alors :*

a) $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$ *b)u est bornée* *c)u est décroissante*

Exercice 2 :

Pour tout $n \in IN^*$, on pose $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$; $v_n = \frac{u_n}{\sqrt{n}}$ *et* $w_n = u_n - 2\sqrt{n}$.

1)a)Montrer que pour tout entier $k \ge 1$ on a : $\frac{1}{2\sqrt{k+1}} \le \sqrt{k+1} - \sqrt{k} \le \frac{1}{2\sqrt{k}}$.

b)En déduire que pour tout entier naturel non nul n on a : $2\sqrt{n+1} - 2 \le u_n \le 2\sqrt{n} - 1$.

2)*Etudier les limites eventuelles des suites* (u_n) *et* (v_n)

3)*a)Montrer que* (w_n) *est bornée.*

b)Etudier la monotonie de la suite (w_n)*. En déduire que* (w_n) *converge vers un réel l compris entre* -2 *et* -1.

Exercice 3 :

Soit (u_n) *la suite réelle définie sur* IN^* *par :* $u_n = \frac{n^2}{2^n}$.

1)a)*Montrer que pour tout entier* $n \ge 5$, $u_{n+1} \le \frac{3}{4} u_n$.

b)Démontrer alors que pour tout entier $n \ge 5$, $u_n \le (\frac{3}{4})^{n-5} u_5$.

c)En déduire que (u_n) *est convergente et déterminer sa limite.*

2)*Pour tout entier* $n \ge 5$*; on pose* $S_n = \sum_{k=5}^{n} u_k$.

Montrer que la suite $(S_n)_{n\ge5}$ *est bornée. En déduire qu'elle est convergente.*

Exercice 4 :

Soit (u_n) la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n} \end{cases}$, $\forall n \in IN$

1)a)Montrer que pour tout $n \in IN$; $u_n \ge 2$.

b)Montrer que (u_n) est croissante .

c)Montrer que $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

4) On a $\forall k\in \mathbb{N}^*$; $-1 \leq (-1)^k \leq 1$; $u_k - 1 > 0$

$\Longleftrightarrow -\left(\frac{1}{2}\right)^k \leq -(u_k-1) \leq (-1)^k(u_k-1) \leq u_k - 1 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^k$

$\Longleftrightarrow -\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^k \leq \sum_{k=1}^{n}(-1)^k(u_k-1) \leq \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^k$

$\Longleftrightarrow -\left(1-\frac{1}{2^n}\right) \leq \sum_{k=1}^{n}(-1)^k(u_k-1) \leq 1-\frac{1}{2^n}$

$\Longleftrightarrow \left|\frac{1}{n}\sum \ldots\right| \leq \frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)$

$\Longleftrightarrow |S_n - 1| \leq \frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)$

Comme $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{2^n}\right) = 0$

$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} S_n = 1$.

2)Soit (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $v_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{u_1.u_2....u_k}$.

a)Montrer que (v_n) est croissante.

b)Montrer que por tout $n\in\mathbb{N}^*$, ~~$v_n \leq 1-\frac{1}{2n}$~~. $V_n \leq 1-\frac{1}{2^n}$

c)En déduire que la suite (v_n) *est majorée et qu'elle est convergente vers un réel* $l\in[0,1]$.

Exercice – 5– :

Soit (u_n) la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{1-u_n+u_n^2}{u_n} \end{cases}$,$\forall n\in\mathbb{N}$

1)*a)Montrer* que pour tout $n\in\mathbb{N}$; $u_n > 1$.

b)Montrer que (u_n) est décroissante .

c)Déduire que (u_n) est convergente et déterminer sa limite .

2)*a)Vérifier* que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1} - 1 \leq \frac{1}{2}(u_n - 1)$.

b)En déduire que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n - 1 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$. Retrouver alors la limite de (u_n).

3)*a)Montrer que pour tout $n\geq 4$; $2^n \geq n^2$* .

b)On pose $v_n = \frac{1}{n(u_n-1)}$.

Montrer que pour tout $n\geq 4$; $v_n \geq n$ puis déterminer $\lim_{n\to+\infty} v_n$.

4)*Soit* (S_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $S_n = 1+\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k(u_k-1)$.

Montrer que pour tout $n\geq 1$; $|S_n - 1| \leq \frac{1}{n}(1-\frac{1}{2^n})$.

En déduire qu'elle est convergente et Déterminer sa limite.

Prof:M.BenAli

Suite de la correction

3) a) pour $n=4$; $2^4 = 16 \geq 4^2 = 16$

Supp que $\forall n\geq 4$; $2^n \geq n^2$

Mq $2^{n+1} \geq (n+1)^2$

On doit démontrer: $2^n.2 \geq n^2+2n+1$

or $2^n \geq n^2$

ainsi $2.n^2 \geq n^2+2n+1$

On se propose de d

On a

alors, $\forall n\in\mathbb{N}$; $2^n \geq n^2$.

b) $\forall n\geq 4$; On a :

$0 < u_n - 1 \leq \frac{1}{2^n}$

$\Longleftrightarrow \frac{1}{u_n-1} \geq 2^n \geq n^2$

$\Longleftrightarrow v_n \geq n$.

Comme $\lim_{n\to+\infty} n = +\infty$

alors $\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty$

Correction de la Série 6.

Ex 1

1) $u_n = \dfrac{(-1)^n \cdot n}{1+n^2}$

On a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2n}{1+4n^2}$

$= \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2\cancel{n}}{\cancel{n}\left(\frac{1}{n}+4n\right)}$

$= 0.$

et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{-2n-1}{1+n^2+4n+1}$

$= \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{-\cancel{n}\left(2+\frac{1}{2n}\right)}{\cancel{n}\left(n+\frac{2}{n}+2\right)}$

$=0$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n} = \lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n+1} = 0$

alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0.$

2) u croissante et (u_{2n}) tend vers 2.

On a $u_{2n} \leq u_{2n+1} \leq u_{2n+2}$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n} = \lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n+2} = 2$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n+1} = 2$

d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2.$

3) On a $0 \leq u_n \leq v_n$

Comme v_n est décroissante alors v_n est majorée par son 1er terme v_0.

d'où $0 \leq u_n \leq v_n \leq v_0$

$\Rightarrow u$ bo...

Ex 2 $\forall n \in \mathbb{N}^*$;

$U_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\sqrt{k}}$; $V_n = \dfrac{U_n}{\sqrt{n}}$

$W_n = U_n - 2\sqrt{n}.$

1) a) On a $\sqrt{k+1} - \sqrt{k} = \dfrac{k+1-k}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}$

$= \dfrac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}$

On a $\sqrt{k+1} \geq \sqrt{k}$

sig $\begin{cases} 2\sqrt{k+1} \geq \sqrt{k}+\sqrt{k+1} \\ \sqrt{k+1}+\sqrt{k} \geq 2\sqrt{k} \end{cases}$

$\Rightarrow 2\sqrt{k+1} \geq \sqrt{k}+\sqrt{k+1} \geq 2\sqrt{k}$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{2\sqrt{k+1}} \leq \sqrt{k+1}-\sqrt{k} \leq \dfrac{1}{2\sqrt{k}}$

b) On a $\forall k \in \mathbb{N}^*$, on a :

$\sqrt{2}-\sqrt{1} \leq \dfrac{1}{2\sqrt{1}}$

$\sqrt{3}-\sqrt{2} \leq \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$

$\sqrt{4}-\sqrt{3} \leq \dfrac{1}{2\sqrt{3}}$

$\vdots$

$\sqrt{n+1}-\sqrt{n} \leq \dfrac{1}{2\sqrt{n}}$

$\sqrt{n+1} - 1 \leq \dfrac{1}{2} \cdot \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\sqrt{k}}$

$\Leftrightarrow U_n \geq 2\sqrt{n+1} - 2.$ ①

D'autre part :

$\dfrac{1}{2\sqrt{2}} \leq \sqrt{2}-\sqrt{1}$

$\dfrac{1}{2\sqrt{3}} \leq \sqrt{3}-\sqrt{2}$

$\vdots$

$\dfrac{1}{2\sqrt{n}} \leq \sqrt{n}-\sqrt{n-1}$

$\sum \dfrac{1}{\sqrt{k}} \leq \sqrt{n}$ ...

D'où ① et ② donnent :

$2\sqrt{n+1} - 2 \leq U_n \leq 2\sqrt{n} - 1$

2) * Comme : $\lim_{n \to +\infty} 2\sqrt{n+1} - 2 = +\infty$

et $U_n \geq 2\sqrt{n+1} - 2$

alors $\lim_{n \to +\infty} U_n = +\infty$.

* On a $\frac{2\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}} - \frac{2}{\sqrt{n}} \leq \frac{U_n}{\sqrt{n}} \leq \frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n}}$

$\Rightarrow 2\sqrt{1+\frac{1}{n}} - \frac{2}{\sqrt{n}} \leq V_n \leq 2 - \frac{1}{\sqrt{n}}$

Comme $\lim_{n \to +\infty} 2\sqrt{1+\frac{1}{n}} - \frac{2}{\sqrt{n}}$

$= \lim_{n \to +\infty} 2 - \frac{1}{\sqrt{n}} = 2$

alors $\lim_{n \to +\infty} V_n = 2$.

3) a/ $-2 \leq W_n \leq -1$

b) $W_{n+1} - W_n = U_{n+1} - U_n - (2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n})$

$= \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$

$= \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$

$= \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n} - 2\sqrt{n+1}}{\sqrt{..}\,(\sqrt{..} + \sqrt{..})}$

$= \frac{\sqrt{n} - \sqrt{n+1}}{\sqrt{..}\,(\ldots)} < 0$.

W_n est décroissante et minorée par -2

$\Rightarrow$ cvg vers une limite ℓ.

* Comme $-2 \leq W_n \leq -1$

$\Rightarrow -2 \leq \ell \leq -1$.

Ex 3 $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $U_n = \frac{n^2}{2^n}$

1) a/ pour tout $n \geq 5$, on a :

$U_{n+1} = \frac{(n+1)^2}{2^{n+1}}$

$\Leftrightarrow U_{n+1} = \frac{(n+1)^2}{2 \cdot n^2} \cdot \frac{n^2}{2^n}$

$= \frac{(n+1)^2}{2n^2} \cdot U_n$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \cdot U_n$.

or $n \geq 5 > 0$

$\Rightarrow \frac{1}{n} \leq \frac{1}{5}$

$\Rightarrow 1 + \frac{1}{n} \leq \frac{6}{5}$

$\Rightarrow \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2 \leq \frac{18}{25} = \frac{72}{100} < \frac{3}{4}$

$\Rightarrow \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2 \leq \frac{3}{4}$

$\Rightarrow U_{n+1} \leq \frac{3}{4} \cdot U_n$.

b) On a ; $\forall n \geq 5$; $0 < U_{n+1} \leq \frac{3}{4} U_n$

On a $0 < U_6 \leq \frac{3}{4} \cdot U_5$

$0 < U_7 \leq \frac{3}{4} \cdot U_6$

$\vdots$

$0 < U_n \leq \frac{3}{4} U_{n-1}$ (X)

$U_n \leq \left(\frac{3}{4}\right)^{n-5} \cdot U_5$.

c) On a ; $\forall n \geq 5$, $0 < U_n \leq \left(\frac{3}{4}\right)^{n-5}$

Comme $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^{n-5} = 0$

car $\frac{3}{4} \in]-1, 1[$.

alors $\lim_{n \to +\infty} U_n = 0$.

2) On a $S_n = \sum_{K=5}^{n} U_K$.

On a $U_K \leq \left(\frac{3}{4}\right)^{K-5} \cdot U_5$.

$\Leftrightarrow \sum_{K=5}^{n} U_K \leq U_5 \cdot \sum_{K=5}^{n} \left(\frac{3}{4}\right)^{K-5}$

$\Leftrightarrow 0 \leq S_n \leq U_5 \cdot \dfrac{1-\left(\frac{3}{4}\right)^{n-4}}{1-\frac{3}{4}}$

$\Leftrightarrow 0 < S_n \leq 4 \cdot U_5 \cdot 1-\left(\frac{3}{4}\right)^{n-4}$

or $1-\left(\frac{3}{4}\right)^{n-4} < 1$

$\Leftrightarrow 0 < S_n \leq 4 U_5$.

$\Leftrightarrow 0 < S_n \leq \frac{25}{8}$.

* S_n ↗ et majorée → cvg.

Ex 4/

1) $\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = U_n + \frac{1}{U_n} ; \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

a) pour $n=0$; $U_0 = 2 \geq 2$.

pour $n \in \mathbb{N}$, Supp que $U_n \geq 2$

Mq $U_{n+1} \geq 2$

~~On a $U_n \geq 2$ ... $U_{n+1} \geq \frac{1}{2}$~~

On a $\left.\begin{array}{l} U_n \geq 2 \\ \frac{1}{U_n} > 0 \end{array}\right\} \boxed{U_{n+1} \geq 2}$

b) $U_{n+1} - U_n = \frac{1}{U_n} > 0$.

$\Rightarrow U$ ↗

c) On suppose que (U_n) possède une limite finie.

On a $\lim_{n \to +\infty} U_{n+1} = \lim_{n \to +\infty} U_n = \ell$

$\Leftrightarrow \lim_{n \to +\infty} U_{n+1} - U_n = 0$.

$\Leftrightarrow \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{U_n} = 0$

$\Leftrightarrow \frac{1}{\ell} = 0$

Impossible.

alors (U_n) n'admet pas de limite

par suite elle n'est pas majorée.

or (U_n) croissante.

d'où $\lim_{n \to +\infty} U_n = +\infty$.

2) a) pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$V_{n+1} - V_n = \sum_{K=1}^{n+1} \dfrac{1}{U_1 \cdot U_2 \cdots U_K} - \sum_{K=1}^{n} \dfrac{1}{U_1 \cdot U_2 \cdots U_K}$

$= \dfrac{1}{U_1 \cdot U_2 \cdot U_3 \cdots U_{n+1}} > 0$

car $U_n \geq 2 > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$

donc V_n croissante.

b) On a : $U_n \geq 2$; $\forall n \in \mathbb{N}$.

$\frac{1}{U_n} \leq \frac{1}{2}$.

$\dfrac{1}{U_1 \cdot U_2 \cdots U_K} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$

$\Rightarrow \sum_{K=1}^{n} \dfrac{1}{U_1 U_2 \cdots U_K} \leq \sum_{K=1}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^n$

$\Leftrightarrow V_n \leq \frac{1}{2} \left(\dfrac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} \right)$

$\Leftrightarrow V_n \leq 1-\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

c) $V_n < 1 - \frac{1}{2n} < 1$

majorée et croissante $\Rightarrow$ cvg.

$0 < V_n < 1$

$\Leftrightarrow 0 \leq l \leq 1$.

Ex 5/
$$\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = \dfrac{1 - U_n + U_n^2}{U_n} \end{cases}$$

1)
a/ pour $n=0$; $U_0 = 2 > 1$.

Supp que $U_n > 1$; $n \in \mathbb{N}$;

et Mq $U_{n+1} > 1$

On a $U_{n+1} - 1 = \dfrac{1 - U_n + U_n^2}{U_n} - 1$

$= \dfrac{1 - 2U_n + U_n^2}{U_n}$

$= \dfrac{(1 - U_n)^2}{U_n} > 0$

car $U_n > 1$

alors $U_{n+1} > 1$.

Conclusion, selon le principe de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n > 1$.

b/ On a $U_{n+1} - U_n = \dfrac{1 - U_n + U_n^2 - U_n^2}{U_n}$

$= \dfrac{1 - U_n}{U_n} < 0$

car $U_n > 1$

$\Rightarrow U \searrow$.

c) * On a (U_n) décroissante et minorée par 1. alors elle est convergente.

* On a (U_n) decroissante donc majorée par $U_0 = 2$. ainsi

$1 < U_n \leq 2$

On pose $f(x) = \dfrac{1 - x + x^2}{x}$; $\forall x$

f continue sur $\mathbb{R}^*_+$

$\Rightarrow$ f " " $[1, 2]$.

$\Rightarrow$ f c " en l.

ainsi on a:

- U_n convergente
- $f(U_n) = U_{n+1}$
- f continue en l

$\Big\}\ f(l) = l$

$\Leftrightarrow \dfrac{1 - l + l^2}{l} = l$

$\Leftrightarrow l = 1$.

donc $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = 1$

2) a/ $U_{n+1} - 1 = \left(1 - \frac{1}{U_n}\right)(U_n - 1)$.

$\Rightarrow 1 - \frac{1}{U_n} < \frac{1}{2}$; $U_n - 1 >$

$\Leftrightarrow U_{n+1} - 1 < \frac{1}{2}(U_n$

b) $\forall n \in \mathbb{N}$; $U_{n+1} - 1 \leq \frac{1}{2}(U_n - 1$

$0 < \cancel{U_1 - 1} \leq \frac{1}{2}(U_0 - 1)$

$0 < \cancel{U_2 - 1} \leq \frac{1}{2}(\cancel{U_1 - 1})$

$0 < \cancel{U_3 - 1} \leq \frac{1}{2}(\cancel{U_2 - 1})$.

$\vdots$

$0 < U_n - 1 \leq \frac{1}{2}(\cancel{U_{n-1}} -$

$\Rightarrow 0 < U_n - 1 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

$\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ car $\frac{1}{2} \in]-$

$\Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} (U_n - 1) = 0$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} U_n = 1$.