EXERCICE N°1:

Soit α un nombre réel appartenant à l'intervalle $]0,1[$.

On considère la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$U_0 = 1 \text{ et } U_{n+1} = \frac{1}{\alpha(2-\alpha U_n)} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

1) a) Montrer que pour tout entier naturel n, on a : $U_n \leq \frac{1}{\alpha}$

b) Montrer que (U_n) est une suite croissante.

c) En déduire que la suite (U_n) est convergente et calculer sa limite.

2) Soit (V_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $V_n = \dfrac{\alpha}{\alpha.U_n - 1}$.

a) Montrer que (V_n) est une suite arithmétique.

b) Exprimer V_n en fonction de n et α. En déduire l'expression de U_n en fonction de n et α.

c) Retrouver alors la limite de la suite (U_n) quand n tend

3) Application : Etudier la limite de la suite (ω_n) définie par :

$$\omega_0 = 1 \text{ et } \omega_{n+1} = \frac{4}{4-\omega_n} ; n \in \mathbb{N}.$$

EXERCICE N°2:

On considère les suites réelles (u_n) et (v_n) définies par :

$u_0 = 1$; $v_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \alpha\, u_n + (1-\alpha)\, v_n$ et $v_{n+1} = (1-\alpha)\, u_n + \alpha\, v_n$

où α est un réel donné tel que $\frac{1}{2} < \alpha < 1$.

1) Soit (t_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $t_n = v_n - u_n$.

a) Calculer t_0 et t_1.

b) Montrer que, pour tout entier naturel n, $t_n = (2\alpha - 1)^n$.

c) En déduire la limite de t_n.

2) a) Montrer que, pour tout entier naturel n, $u_n \leq v_n$.

b) Montrer que la suite (u_n) est croissante et que la suite (v_n) est décroissante.

c) En déduire que les suites (u_n) et (v_n) convergent vers une même limite ℓ.

d) Montrer que, pour tout entier naturel n, $u_n + v_n = 3$ et en déduire la valeur de la limite ℓ.

EXERCICE N°3:

Soit f la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{2}{\sqrt{1+x}}$ et ζ_f sa courbe dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

1) a) Etudier les variations de f

b) Montrer que f ré ... un intervalle I que l'on préci

c) Explicité f

موقع مراجعة باكالوريا
BAC.MOURAJAA.COM
bac Math

2) Montrer que pour tout $x \in [1,2]$, on a : $|f'(x)| \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}$

3) Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 = 1$ *et* $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

a) Montrer que : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq u_n \leq 2$

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2\sqrt{2}} |u_n - \alpha|$

c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^n$. En déduire que la suite (u_n) converge vers une limite qu'on précisera.

EXERCICE 4

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \frac{k}{e^k} = -\frac{1}{e} + \frac{2}{e^2} - \frac{3}{e^3} + \cdots + (-1)^n \frac{n}{e^n}$.

1) a) Montrer que pour tout entier naturel n, $(2n+2) - e(2n+1) < 0$.

b) Montrer que pour tout entier naturel non nul n,

$$u_{2n+2} - u_{2n} = \frac{1}{e^{2n+2}}[(2n+2) - e(2n+1)].$$

En déduire que la suite $(u_{2n})_{n \geq 1}$ est décroissante.

2) Montrer que la suite $(u_{2n+1})_{n \geq 1}$ est croissante.

3) a) Montrer que pour tout entier naturel non nul n, $u_{2n} > u_{2n+1}$.

b) Calculer $\lim_{n \to +\infty} (u_{2n} - u_{2n+1})$.

4) Montrer que la suite (u_n) converge vers un réel α et que $u_3 < \alpha < u_2$.

موقع مراجعة باكالوريا
BAC.MOURAJAA.COM
bac Math

Révision Suites

Ex 1)

$\alpha \in]0,1[$.

$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_n = \dfrac{1}{\alpha(2-\alpha U_n)} \ ; n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

1) a/ pour $n=0$, On a $0<\alpha<1$

ssi $\frac{1}{\alpha} > 1$

$U_0 \leq \frac{1}{\alpha}$

pour $n \in \mathbb{N}$, Supposons que $U_n \leq \frac{1}{\alpha}$

Mq $U_{n+1} \leq \frac{1}{\alpha}$.

On a $U_n \leq \frac{1}{\alpha}$.

ssi $-\alpha U_n \geq -1$.

$\alpha(2-\alpha U_n) \geq 1 \times \alpha > 0$

$\frac{1}{\alpha(2-\alpha U_n)} \leq \frac{1}{\alpha}$

$U_{n+1} \leq \frac{1}{\alpha}$.

Conclusion, par principe de raisonnement par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$U_n \leq \frac{1}{\alpha}$.

b/ pour $n \in \mathbb{N}$,

$\cancel{U_{n+1} - U_n = \frac{1}{\alpha(2-\alpha U_n)} - U_n}$.

$\cancel{= \frac{1 - \alpha U_n \cdot (2-\alpha U_n)}{\alpha(2-\alpha U_n)}}$

$\cancel{\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{1}{U_n \alpha (2-\alpha U_n)}}$

On a $U_{n+1} - U_n = \dfrac{1 - \alpha U_n \cdot (2-\alpha U_n)}{\alpha(2-\alpha U_n)}$

$= \dfrac{1 + (\alpha U_n)^2 - 2\alpha U_n}{\alpha(\ldots)}$

$=$

Comme $U_n \leq \frac{1}{\alpha}$; $\alpha > 0$

alors $\alpha U_n \leq 1 \leq 2$.

$2 - \alpha U_n \geq 0$ et $1-$

D'où $U_{n+1} - U_n \geq 0$

$U_{n+1} \geq U_n$.

(U_n) est donc croissante.

c/ (U_n) est croissante et majorée par $\frac{1}{\alpha}$.

Donc elle est convergente vers une limite $\ell \leq \frac{1}{\alpha}$.

Or (U_n) est croissante donc minorée par $U_0 = 1$.

D'où $1 \leq \ell \leq \frac{1}{\alpha}$

On pose $f : [1, \frac{1}{\alpha}] \to \mathbb{R}$

$x \mapsto f(x) = \dfrac{1}{\alpha(2-\alpha x)}$

On a $U_{n+1} = f(U_n)$.

f est une fonction rationnelle, continue sur $D_f = \mathbb{R} \setminus \{\frac{2}{\alpha}\}$.

En particulier, f continue en ℓ

On a :

$$\begin{cases} (U_n) \text{ converge vers } \ell \\ f(U_n) = U_{n+1} \\ f \text{ continue en } \ell \end{cases}$$

alors : $f(\ell) = \ell$.

ssi $\dfrac{1}{\alpha(2-\alpha\ell)} = \ell$

~~ssi~~ $\cancel{\alpha\ell \ 2 - 2(\alpha\ell)}$

ssi $1 = \alpha\ell(2-\alpha\ell)$

" $1 = 2\alpha\ell - (\alpha\ell)^2$.

ssi $(\alpha\ell)^2 - 2\alpha\ell + 1 = 0$

$(\alpha\ell - 1)^2 = 0$.

موقع مراجعة باكالوريا
BAC.MOURAJAA.COM
bac Math

2) pour $n \in \mathbb{N}$, $V_n = \dfrac{\alpha}{\alpha U_n - 1}$.

a/ $V_{n+1} - V_n = \dfrac{\alpha}{\alpha U_{n+1} - 1} - \dfrac{\alpha}{\alpha U_n - 1}$

$= \dfrac{\alpha}{\dfrac{\cancel{\alpha}}{\cancel{\alpha}(2-\alpha U_n)} - 1} - \dfrac{\alpha}{\alpha U_n - 1}$

$= \dfrac{\alpha}{\dfrac{1-(2-\alpha U_n)}{(2-\alpha U_n)}} - \dfrac{\alpha}{\alpha U_n - 1}$

$= \dfrac{\alpha (2-\alpha U_n)}{-1+\alpha U_n} - \dfrac{\alpha}{-1+\alpha U_n}$

$= \dfrac{2\alpha - \alpha^2 U_n - \alpha}{\alpha U_n - 1}$

$= \dfrac{\alpha(1-\alpha U_n)}{\alpha U_n - 1}$

$= -\alpha$.

(V_n) est une suite arithmétique de raison $(-\alpha)$ et de premier terme $V_0 = \dfrac{\alpha}{\alpha - 1}$

b/ pour $n \in \mathbb{N}$,

$V_n = V_0 + n.(-\alpha)$

$= \dfrac{\alpha}{\alpha - 1} - \alpha n = \dfrac{\alpha - \alpha^2 n + \alpha n}{\alpha - 1}$

On a $\cancel{\left(\dfrac{\alpha}{\alpha U_n - 1} = \dfrac{\alpha}{\alpha - 1} - \alpha n\right)}$

$V_n = \dfrac{\alpha}{\alpha U_n - 1}$.

ssi $\alpha V_n U_n - V_n = \alpha$.

$U_n = \dfrac{\alpha + V_n}{\alpha V_n}$ ...

$U_n = \dfrac{1}{\alpha} + \dfrac{\alpha - 1}{\alpha - \alpha^2 n + \alpha n}$.

c/ On a $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\alpha} + \dfrac{\alpha - 1}{\alpha - \alpha^2 n + \alpha n}$

$= \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\alpha} + \dfrac{\alpha - 1}{n(\alpha - \alpha^2) + \alpha}$

$= \dfrac{1}{\alpha}$.

Car $\lim\limits_{n\to+\infty} n(\alpha - \alpha^2) + \alpha = +\infty$ (α ...

3) pour $n \in \mathbb{N}$,

$\begin{cases} \omega_0 = 1. \\ \omega_{n+1} = \dfrac{4}{4 - \omega_n} \end{cases}$

On a $\omega_{n+1} = \dfrac{4}{2\left(2 - \frac{1}{2}\omega_n\right)}$

$= \dfrac{2}{2 - \frac{1}{2}\omega_n}$

$= \dfrac{1}{\frac{1}{2}\left(2 - \frac{1}{2}\omega_n\right)}$; $n \in \mathbb{N}$.

~~donc~~

pour $n = 0$, $\omega_0 = U_0 = 1$.

$\Rightarrow$ pour $n \in \mathbb{N}$, $\omega_n = U_n$ pour $\alpha = \frac{1}{2}$

$\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} \omega_n = 2}$

Ex 2

$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \alpha U_n + (1-\alpha) V_n \end{cases}$ $\begin{cases} V_0 = 2 \\ V_{n+1} = (1-\alpha) U_n + \ldots \end{cases}$

avec $\alpha \in \left]\frac{1}{2}, 1\right[$.

1) $t_n = V_n - U_n$; $n \in \mathbb{N}$.

a/ $t_0 = V_0 - U_0$

$= 2 - 1$

$= 1$.

$t_1 = V_1 - U_1$

$= (1-\alpha).U_0 + \alpha V_0 - \alpha U_0 - (1-\alpha)\ldots$

$= 1 - \alpha + 2\alpha - \alpha \ldots$

موقع مراجعة باكالوريا
BAC.MOURAJAA.COM
bac Math

b/ pour $n=0$, $t_0 = 1 = (2\alpha-1)^0$ $(\alpha \neq \frac{1}{2})$

pour $n\in\mathbb{N}$, Supp que $t_n=(2\alpha-1)^n$

Mq $t_{n+1}=(2\alpha-1)^{n+1}$.

On a $t_{n+1} = V_{n+1} - U_{n+1}$

$= (1-\alpha)U_n + \alpha V_n - \alpha U_n - (1-\alpha)V_n$

$= \cancel{U_n(1-\alpha}$

$\cancel{= U_n - \alpha U_n + \alpha V_n - \alpha U_n - V_n}$

$= (1-\alpha)(U_n - V_n) + \alpha(V_n - U_n)$

$= (U_n - V_n)(1-2\alpha)$.

$= -t_n(1-2\alpha)$

$= (2\alpha-1)^n \times (2\alpha-1)$

$= (2\alpha-1)^{n+1}$

Par principe de raisonnement par récurrence, pour $n\in\mathbb{N}$,

$t_n = (2\alpha-1)^n$.

c/ On a $\frac{1}{2} < \alpha < 1$

$1 < 2\alpha < 2$

$0 < 2\alpha - 1 < 1$

D'où $\lim\limits_{n\to+\infty} t_n = \lim\limits_{n\to+\infty} (2\alpha-1)^n$

$=0$.

2) a/ pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$t_n = (2\alpha-1)^n$.

or $2\alpha - 1 > 0$

D'où $t_n > 0$

ssi $V_n - U_n > 0$.

donc $V_n \geq U_n$.

b/ pour $n\in\mathbb{N}$,

$U_{n+1} - U_n = (\alpha-1)U_n + (1-\alpha)V_n$

$= (1-\alpha)(V_n - U_n) > 0$

Car $\alpha < 1$ et $U_n \leq V_n$

Donc (U_n) croissante.

$V_{n+1} - V_n = (1-\alpha)U_n + \alpha V_n - V_n$

$= (1-\alpha)(U_n - V_n) < 0$.

Car $1-\alpha > 0$ et $U_n \leq V_n$.

Donc (V_n) decroissante.

c/ Les suites (U_n) et (V_n) sont telles que ~~On a~~ pour $n\in\mathbb{N}$,

$\begin{cases} U_n \leq V_n. \\ (U_n) \text{ est croissante et } (V_n) \text{ décroissante} \\ \lim\limits_{n\to+\infty} V_n - U_n = \lim\limits_{n\to+\infty} t_n = 0 \end{cases}$

Donc (U_n) et (V_n) sont adjacentes.

D'où elles sont convergentes vers une même limite ℓ.

d/ ~~pour n∈N,~~ pour $n\in\mathbb{N}$,

$\cancel{U_n + V_n = \alpha U_n + (1-\alpha)V_n}$

On pose $a_n = V_n + U_n$.

On a $a_{n+1} = V_{n+1} + U_{n+1}$

$= (1-\alpha)U_n + \alpha V_n + (1-\alpha)V_n$

$= U_n + V_n$.

$= a_n$.

D'où (a_n) est constante.

pour $n\in\mathbb{N}$, $a_n = a_0$

$U_n + V_n = V_0 + U_0$

$U_n + V_n = 1 + 2$

$U_n + V_n = 3$

D'où $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n + V_n = 3$

$2\ell = 3$.

$\ell = \frac{3}{2}$.

Ex 3

~~$f(x) = \frac{2}{\sqrt{1+x}}$; $x \in [0,+\infty[$.~~

~~1) a/ f est dérivable~~

موقع مراجعة باكالوريا
BAC.MOURAJAA.COM
bac Math

Ex 4

pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$U_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \cdot \frac{k}{e^k}$$

1) a/ ~~pour n = 0,~~

$~~(2\times0+2) - e(2\times0) = 2-e~~$

$~~\simeq -0,718 < 0~~$

~~pour $p \in \mathbb{N}$, Supp que $(2n+2) - e(2n+1) < 0$~~

~~Mq $(2n+4) - e(2n+3) < 0$.~~

pour $n \in \mathbb{N}$,

$$2n+2 - 2ne - e = 2n(1-e) + (2-e)$$

Comme $\left.\begin{array}{l} 2n > 0 \\ 1-e < 0 \end{array}\right\} (1-e)2n < 0$

et $2-e < 0$

d'où $(2n+2) - e(2n+1) < 0$

b/ pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$U_{2n+2} = \sum_{k=1}^{2n+2} (-1)^k \cdot \frac{k}{e^k}$$

$$U_{2n} = \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k \cdot \frac{k}{e^k}.$$

$$U_{2n+2} - U_{2n} = \sum_{k=2n+1}^{2n+2} (-1)^k \cdot \frac{k}{e^k}$$

$$= \frac{-(2n+1)}{e^{2n+1}} + \frac{2n+2}{e^{2n+2}}$$

$$= \frac{-e(2n+1) + 2n+2}{e^{2n+2}}$$

$$= \frac{1}{e^{2n+2}} \cdot \left[(2n+2) - e(2n+1)\right].$$

Comme $\left.\begin{array}{l} \dfrac{1}{e^{2n+2}} > 0 \\ \left[2n+2 - e(2n+1)\right] < 0 \end{array}\right\} U_{2n+2} < U_{2n}$

sig $U_{2(n+1)} < U_{2n}$

D'où (U_{2n}) ...

2) pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$U_{2n+3} - U_{2n+1} = \sum_{k=1}^{2n+3} (-1)^k \cdot \frac{k}{e^k} - \sum_{k=1}^{2n+1} (-1)^k \cdot \frac{k}{e^k}$$

$$= (-1)^{2n+2} \cdot \frac{2n+2}{e^{2n+2}} + (-1)^{2n+3} \cdot \frac{2n+3}{e^{2n+3}}$$

$$= \frac{2n+2}{e^{2n+2}} - \frac{2n+3}{e^{2n+3}}$$

$$= \frac{1}{e^{2n+3}} \cdot \left[e(2n+2) - (2n+3)\right]$$

$$= \frac{2ne + 2e - 2n - 3}{e^{2n+3}}$$

$$= \frac{2n(e-1) + (2e-3)}{e^{2n+3}} > 0.$$

Car $e > 1$ et $2e > 3$.

$e^{2n+3} > 0$; $2n > 0$.

D'où (U_{2n+1}) est croissante.

3) a/ On a:

$$U_{2n+1} = U_{2n} + (-1)^{2n+1} \cdot \frac{2n+1}{e^{2n+1}}$$

$$U_{2n+1} - U_{2n} = -\frac{2n+1}{e^{2n+1}} < 0.$$

donc $U_{2n} > U_{2n+1}$.

b/ On a $\lim\limits_{n\to+\infty} U_{2n} - U_{2n+1}$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{2n+1}{e^{2n+1}} = 0.$$

Car $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{n\to+\infty} 2n+1 = +\infty \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{e^n} = 0 \end{array}\right\}$

4) Les suites (U_{2n}) et (U_{2n+1}) sont tq

• (U_{2n}) décroissante et (U_{2n+1}) est croissante

• $U_{2n} > U_{2n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

• ... $(U_{2n} - U_{2n+1}) = 0$

... et (U_{2n+1}) sont ...

موقع مراجعة باكالوريا
BAC.MOURAJAA.COM
bac Math

Par suite elles convergent vers la même limite α.

On a $\lim\limits_{n \to +\infty} U_{2n} = \alpha$. et (U_n) decroissante $\Big\}$

pour $n \in \mathbb{N}^*$ $\alpha < U_{2n} < U_2$. ①

De même $\lim\limits_{n \to +\infty} U_{2n+1} = \alpha$ (U_{2n+1}) croissante $\Big\}$

pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\alpha > U_{2n+1} > U_3$ ②

① et ② donnent :

$$U_3 < \alpha < U_2$$

Ex 3

$$f : [0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto f(x) = \frac{2}{\sqrt{1+x}}$$

1) a/ f est dérivable sur $[0,+\infty[$.

pour $x \geq 0$,

$$f'(x) = \frac{-\frac{\cancel{2}}{\cancel{2}\sqrt{1+x}}}{1+x}$$

$$= \frac{-1}{\cancel{2}(\sqrt{1+x})^3} < 0.$$

x	0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$	2	$\searrow$	0

b/ f est strictement decroissante et continue sur $\mathbb{R}+$.

Donc elle réalise une bijection de $\mathbb{R}+$ sur $f(\mathbb{R}+) =]0,2] = I$

c/ $f^{-1} : I =]0,2] \longrightarrow [0,+\infty[$

$$x \longmapsto y = f^{-1}(x).$$

On pose $\left\{ \begin{array}{l} y = f^{-1}(x) \text{ ssi } f(y) = x \\ y \in [0,+\infty[\\ x \in \end{array} \right.$

On a $x = \dfrac{2}{\sqrt{1+y}}$

ssi $\sqrt{1+y} = \dfrac{2}{x}$ $(x \neq 0)$.

$$1+y = \frac{4}{x^2}$$

$$y = \frac{4}{x^2} - 1.$$

d/ $f(x) = x$ ssi $f(x) - x = 0$.

On pose $h(x) = f(x) - x$; $x \in \mathbb{R}$

l'équation devient : $h(x) = 0$.

h est dérivable sur $[0,+\infty[$. alors

pour $x \in [0,+\infty[$,

$$h'(x) = f'(x) - 1 < 0.$$

Donc h strictement decroissante et continue sur $[0,+\infty[$.

Donc elle réalise une bijection de $[0,+\infty[$ sur $h(\mathbb{R}+) =]\lim\limits_{+\infty} h,$

$$=]-\infty, 2]$$

Comme $0 \in]-\infty, 2]$.

Il existe un unique $\alpha \in]0,+\infty[$

tq $h(\alpha) = 0$

ssi $f(\alpha) = \alpha$.

* h est continue sur $[1,2]$. $h(1) = 0,41 > 0$ $h(2) = -0,84 < 0$. $\Bigg\}$

D'après le Théorème des Valeurs intermédiaires : $1 < \alpha < 2$.

2) On a $f'(x) = \dfrac{-1}{\cancel{2}(\sqrt{1+x})^3} < 0$

donc $|f'(x)| = \dfrac{1}{2\sqrt{1+x}^3} \Rightarrow$

Comme $1 \leq x \leq 2$

$$0 < \sqrt{2}^3 \leq \sqrt{1+x}^3 \leq \sqrt{3}^3$$

$$0 < \frac{1}{3\sqrt{3}} \leq \frac{1}{1+x} \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$|f'(x)| \leq$$

موقع مراجعة باكالوريا
BAC.MOURAJAA.COM
bac Math

3) $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$

a/ pour $n=0$, $1 \leq U_0 = 1 \leq 2$.

pour $n \in \mathbb{N}$, Supp que $1 \leq U_n \leq 2$

Mq $1 \leq U_{n+1} \leq 2$

On a f décroissante sur $[1, 2]$.

donc $1 \leq U_n \leq 2$

$$f(2) \leq f(U_n) \leq f(1)$$

$$1 < \frac{2}{\sqrt{2}} \leq U_{n+1} \leq \sqrt{2} < 2.$$

Conclusion, par P.R., $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$1 \leq U_n \leq 2$$

b/ f est dérivable sur $[0, +\infty[$,

en particulier sur $[1, 2]$

pour $x \in [1, 2]$, $|f'(x)| \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}$.

or $U_n \in [1, 2]$ et $\alpha \in]1, 2[$.

D'après le corrollaire des accroissements finies, On a :

$$|f(U_n) - f(\alpha)| \leq \frac{1}{2\sqrt{2}} |U_n - \alpha|$$

ssi $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2\sqrt{2}} |U_n - \alpha|$.

c/ pour $n=0$, $U_1 = f(1) = \sqrt{2}$.

$$|U_0 - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^{0+1} |U_0 - \alpha|.$$

pour $n \in \mathbb{N}$, Supp que

$$|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^n |U_0 - \alpha|$$

Mq $|U_{n+1} - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^{n+1} |U_0 - \alpha|$

On a $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2\sqrt{2}} |U_n - \alpha|$.

or $|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^n \cdot |U_0 - \alpha|$

donc $|U_{n+1} - \alpha| \leq ($

Conclusion, par PR, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^n \cdot |U_0 - \alpha| \leq ($$

Donc (U_n) converge vers α.

موقع مراجعة باكالوريا
BAC.MOURAJAA.COM
bac Math