Exercice n°1

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par $\begin{cases} f(x) = \sqrt{x}\,\ln x & \text{si } x>0 \\ f(0)=0 \end{cases}$

on designe par (C) sa courbe representative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

1°) a) Etudier la continuité et la dérivabilité de f à droite en 0

b) Dresser le tableau de variation de f.

c) Montrer que le point A d'abscisse 1 est un point d'inflexion pour (C)

d) Tracer (C) en precisant la tangente à (C) en A (voir annexe placer le point $B(\frac{1}{e^2},\frac{2}{e})$ de C)

2°) Soit $p\in\mathbb{N}^*$, on pose $F_p(x) = \int_x^1 \sqrt{t}\,(\ln(t))^p\,dt$ ou $x\in]0,1[$

a) Calculer $F_1(x)$ puis verifier que $\lim\limits_{x\to 0^+} F_1(x) = \frac{-4}{9}$

b) Montrer que pour tout entier $p\in\mathbb{N}^*$ et que pour tout réel $x\in]0,1[$ on a:

$$F_{p+1}(x) = -\frac{2}{3}x\sqrt{x}\,[\ln(x)]^{p+1} - \frac{2}{3}(p+1)F_p(x).$$

c) Mq par reccurence que $F_p(x)$ admet une limite finie.

$$u_p = (-1)^p(p!)\left(\frac{2}{3}\right)^{p+1} \text{ quand } x\to 0^+$$

Exercice n°2

Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = \frac{\ln x}{x(1+\ln^2 x)}$

on designe par Γ la courbe de f dans R.O.N $(O,\vec{i},\vec{j})$

1°) Soit g la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $g(x) = \ln^3 x + \ln^2 x + \ln x - 1$

a) Prouver que g est strictement croissante sur $]0,+\infty[$

b) Mq $g(x)=0$ admet dans $]0,+\infty[$ une seule solution α et que $\alpha\in]1{,}6,1{,}8[$

c) Preciser le signe de $g(x)$ pour tout $x\in]0,+\infty[$

2°) a) Mq $\forall x\in]0,+\infty[$, $f'(x) = -\frac{g(x)}{x^2(1+\ln^2 x)^2}$.

b) Dresser le T.V de f et tracer Γ

c) on designe par $\mathcal{A}$: l'aire de la partie du plan limitée par la courbe Γ et les droites $x=1$, $x=e$ et $y=0$.

Prouver que $\mathcal{A} = \frac{\ln 2}{2}$ (u a)

3°) Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on pose $U_n = \int_1^e \frac{\ln^{2n+1}(x)}{x(1+\ln^2 x)}\,dx$.

a) Mq pour tout $n\in\mathbb{N}$, $U_n\geq 0$

b) Mq (U_n) est monotone. En déduire que (U_n) est convergente

c) Mq pour tout $n\in\mathbb{N}$, $U_n+U_{n+1} = \frac{1}{2n+2}$. En déduire U_1

d) Determiner $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.

Exercice n°3

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n = \int_1^e \frac{(\ln x)^n}{x^2}\,dx$

1°) a) Montrer à l'aide d'une intégration par partie que $I_1 = 1 - \frac{2}{e}$.

b) Montrer que la suite (I_n) est decroissante et déduire qu'elle est Convergente

2°) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et pour tout $x \in [1, e]$ on a :

$$\frac{(\ln x)^n}{xe} \leq \frac{(\ln x)^n}{x^2} \leq \frac{(\ln x)^n}{x}$$

b) Montrer alors que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\frac{1}{(n+1)e} \leq I_n \leq \frac{1}{(n+1)}.$$

En déduire $\lim_{n \to +\infty} I_n$.

3°) a) Mq à l'aide d'une intégration par partie que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

on a $I_{n+1} = (n+1) I_n - \frac{1}{e}$

b) Montrer par recurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\frac{1}{n!} I_n = 1 - \frac{1}{e} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$$

c) En déduire $\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$

Exercice n°4 : soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = 1 + \ln^2 x$

on note $(\mathscr{C})$ la courbe representative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1°) a) Etudier les variations de f

b) Preciser le branches infinies de $(\mathscr{C})$

c) Construire la courbe $(\mathscr{C})$

2°) soit $\lambda > 0$, $I(\lambda) = \int_\lambda^1 f(x)\,dx$.

a) Calculer en fonction de λ l'integrale $\int_\lambda^1 \ln x\,dx$

et montrer que $I(\lambda) = 3(1 - \lambda) + 2\lambda \ln \lambda - \lambda \ln^2 \lambda$

b) Mq $\lim_{\lambda \to 0^+} I(\lambda) = 3$

3°) soit $n \geq 2$: $S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$ et $J_k = \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(x)\,dx$ où $1 \leq k \leq n-1$

a) Mq f est décroissante sur $\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]$. En déduire que :

$$\frac{1}{n} f\left(\frac{k+1}{n}\right) \leq J_k \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

b) Mq $\forall n \geq 2$: $S_n - \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right) \leq I\left(\frac{1}{n}\right) \leq S_n - \frac{1}{n} f(1)$ et Calculer $\lim_{n \to +\infty} S_n$

c) En déduire que $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \ln^2\left(\frac{n}{k}\right) = 2$

Exercice n°5

Soit la fonction g définie sur $[0,+\infty[$ par : $\begin{cases} g(x) = x\ln\left(\frac{x}{x+1}\right) & \text{si } x>0 \\ g(0) = 0 \end{cases}$

$\mathcal{C}$ désigne la courbe de g dans R.O.N.D $(O,\vec{i},\vec{j})$

1°) a) Mq g est continue à droite en 0

b) Etudier la dérivabilité de g à droite en 0. Interpréter.

c) Vérifier $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -1$. Interpréter.

2°) a) Soit a et b deux réels strictement positifs tels que $a<b$. Mq que $1-\frac{a}{b} \leq \ln b - \ln a \leq \frac{b}{a} - 1$.

b) Déduire que $\forall x \in]0,+\infty[$ $\ln\left(\frac{x}{x+1}\right) \leq \frac{-1}{x+1}$.

c) Etudier les variations de g.

3°) Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et f_k la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par : $\begin{cases} f_k(x) = x\ln\left(\frac{x}{x+k}\right) & \text{si } x>0 \\ f_k(0) = 0 \end{cases}$

$\mathcal{C}_k$ désigne la courbe de f_k dans $(O,\vec{i},\vec{j})$.

a) Mq $\mathcal{C}_k = h_{(O,k)}(\mathcal{C})$. Donner une interprétation.

b) Déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f_k(x) = -k$.

4°) On a tracé dans l'annexe la courbe représentative $\mathcal{C}_{k_0}$ de f_{k_0}.

a) Par lecture graphique déterminer k_0.

b) Tracer $\mathcal{C}$ à partir de $\mathcal{C}_{k_0}$.

c) A l'aide d'une intégration par partie calculer l'aire A de la partie du plan limitée par $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations : $x = \frac{1}{e-1}$ et $x = 1$.

Exercice n°6

1°) a) A l'aide des inégalités des accroissements finis, montrer que pour tout $x>1$: $\frac{x-1}{x} \leq \ln x \leq x-1$.

b) Mq $\forall x \in]0,1[$, $\frac{x-1}{x} \leq \ln x \leq x-1$ $\forall x \in]0,1[$

c) En déduire que pour tout $x>0$, $\frac{x-1}{x} \leq \ln x \leq x-1$.

. En déduire que pour tout $x \in]0,1[$, $\ln(1+x) \leq x \leq -\ln(1-x)$

2°) Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $U_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}$.

a) Mq $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\ln(2+\frac{1}{n}) \leq U_n \leq \ln(2+\frac{2}{n-1})$

b) En déduire que la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite quand n tend vers $+\infty$

Exercice n°7 (p 2008)

1°) f la fonction définie sur $[-2,2]$ par : $\begin{cases} f(x) = (x+2)\ln(x+2) & \text{si } x \neq -2 \\ f(-2) = 0. \end{cases}$

on désigne par $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

a) Mq f est continue à droite en (-2)

b) ~~[illegible]~~ f est dérivable à dte en (-2)

c) Donner le Tableau de variation de f

2°) Soit g la fonction définie sur $[-2,2]$ par $g(x) = f(x) - x\sqrt{4-x^2}$.

Soit $(\mathcal{C}')$ sa courbe représentative dans un R.O.N $(O, \vec{i}, \vec{j})$

a) Déterminer la position relative de $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$

b) Dans l'annexe ci-contre, on a tracé la courbe $(\mathcal{C}')$ de g dans le même repère

Tracer la courbe $(\mathcal{C})$ dans le même repère

3°) Soit α un nombre réel non nul appartenant à $[-2,2]$

a) on désigne par A_α l'aire de la partie du plan limité par les courbes $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$ et les droites d'éq : $x=0$ et $x=\alpha$. (on distinguera les deux cas $\alpha>0$ et $\alpha<0$

b) Mq $A_\alpha = \int_0^\alpha x\sqrt{4-x^2}\,dx$

c) Calculer A_α

d) En déduire l'aire de la partie du plan limitée par les deux courbes $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$

Exercice 9°

pour tout $x \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n = \int_1^e \frac{(\ln x)^n}{x^2} dx$.

1°) a) Mq à l'aide d'une integration par partie que $I_1 = 1 - \frac{2}{e}$.

b) Mq la (I_n) est decroissante et en déduire qu'elle est Convergente.

2°) a) Mq $\forall n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $x \in [1, e]$ on a :

$$\frac{(\ln x)^n}{xe} \leq \frac{(\ln x)^n}{x^2} \leq \frac{(\ln x)^n}{x}$$

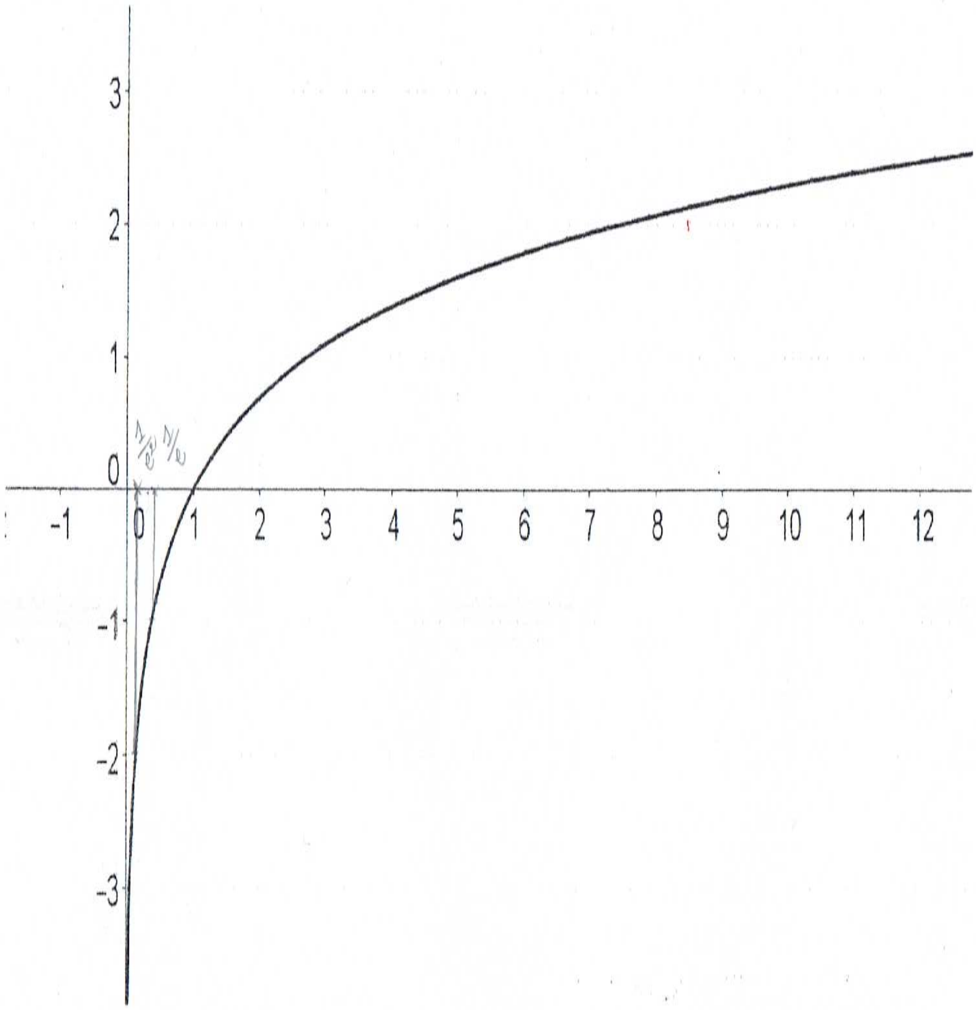
b) Mq alors que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\frac{1}{(n+1)e} \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$. En déduire $\lim_{n \to +\infty} I_n$

3°) a) Mq à l'aide d'une integration par partie que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ on a $I_{n+1} = (n+1) I_n - \frac{1}{e}$.

b) Mq par recurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\frac{1}{n!} I_n = 1 - \frac{1}{e} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$$

c) En déduire $\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$



3
2
1
0
-1
-2
-3
-1
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12