Lycée pilote de Tunis	Sujet de révision temps nécessaire 3 h	Terminales Maths
Mr Ben Regaya. A	+ éléments de corrections	www.ben-regaya.net

Exercice1 « déplacements & antidéplacements »

Le plan est orienté dans le sens direct, ABC est un triangle rectangle en A tel que $\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}\right)\equiv\frac{\pi}{3}\left[2\pi\right]$ et O le milieu de $\left[BC\right]$.

1. a) Montrer qu'il existe un unique déplacement f qui transforme O en A et B en C.

   b) Montrer que f est une rotation. On note I son centre.

   c) Donner une mesure de chacun des angles $\left(\overrightarrow{IB},\overrightarrow{IO}\right)$ et $\left(\overrightarrow{IO},\overrightarrow{IA}\right)$. Déduire que I appartient au segment $\left[AB\right]$ et que I est le barycentre des points pondérés (A, 2) et (B, 1).

2. a) Soit r la rotation de centre C et d'angle $\frac{\pi}{3}$. Caractériser l'application $f\circ r$.

   b) On note C' l'image de C par f. Montrer que les points O , I et C' sont alignés.

3. Soit g l'antidéplacement qui transforme O en A et B en C.

   a) Déterminer les images des droites (OI) et (OA) par g.

   b) Donner la nature de g et ces éléments caractéristiques.

Exercice2 « Dérivations & fonctions réciproques »

Soit f la fonction définie sur $\left[2,+\infty\right[$ par : $f(x)=\sqrt{1-sin\left(\frac{\pi}{x}\right)}$.

1. a) Etudier la dérivabilité de f à droite en 2.

   b) Etudier les variations de f puis tracer sa courbe $\mathscr{C}$ dans un repère orthonormé du plan.

2. a) Montrer que f admet une fonction réciproque g définie sur $J=\left[0,1\right[$.

   b) Construire la courbe $\mathscr{C}'$ de g dans le même repère que $\mathscr{C}$.

3. a) Déterminer $g'\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

   b) Montrer que $\frac{1}{g}$ est dérivable sur J puis vérifier que $\forall x\in J$; $\left(\frac{1}{g}\right)'(x)=\frac{-2}{\pi\sqrt{2-x^2}}$.

4. Soit u la suite définie pour n entier naturel supérieur ou égale à 2 par $u_n=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}g\left(\frac{1}{n+k}\right)$.

   a) Montrer que pour tout n entier naturel supérieur ou égale à 2 ; $\frac{n+1}{n}g\left(\frac{1}{2n}\right)\leq u_n\leq\frac{n+1}{n}g\left(\frac{1}{n}\right)$.

   b) Déduire la convergence de la suite u vers un réel que l'on calculera.

5. Soit h la fonction définie sur $\left[-1,1\right]$ par $h(x)=\frac{1}{\pi\sqrt{2-x^2}}$ et H la primitive de h sur $\left[-1,1\right]$ qui s'annule en 0.

   a) Prouver que H est impaire.

   b) Montrer que pour tout x de $\left[0,1\right[$ on a : $1-4H(x)=\frac{2}{g(x)}$.

   c) Etudier les variations de H puis construire sa courbe dans un autre repère orthonormé.

Exercice 3 « Dérivations & fonctions réciproques »

A- Soit la fonction f définie sur $[0,2[$ par : $\begin{cases} f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{2x-x^2}} & si\ 0 \prec x \prec 2 \\ f(0)=0 \end{cases}$

1. a) Etudier la continuité et la dérivabilité de f en zéro.

   b) Etudier les variations de f sur $]0,2[$.

2. Montrer que f admet une fonction réciproque g définie sur $[0,+\infty[$.

3. a) Montrer que pour tout $x \in [0,2[$: $f(x) \geq x$.

   b) Tracer dans un même repère orthonormé, les courbes représentatives ζ et ζ' de f et g .On précisera la demi tangente au point d'abscisse zéro.

4. Soit n un entier naturel non nul.

   a)Montrer que l'équation $f(x)=\dfrac{1}{n}$ admet dans $[0,2[$ une solution unique α_n.

   b) Montrer que la suite (α_n) est décroissante. En déduire qu'elle est convergente.

   c) On désigne par l la limite de (α_n).Montrer que $f(l)=0$ et déduire la valeur de l.

B- Soit h la fonction définie sur $\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ par : $h(x)=\dfrac{1}{sin(2x)}-f(2\,cos^2x)$.

1. a) Montrer que pour tout $x \in \left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$,on a : $h(x)=-cot(2x)$.

   b) Montrer que h est une bijection de $\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ sur ℝ. On désigne par φ sa fonction réciproque.

   c) Calculer $\varphi(0)$, $\varphi(1)$ et la limite de φ quand x tend vers $+\infty$.

2. Montrer que φ est dérivable sur ℝ et que pour tout réel x, on a $\varphi'(x)=\dfrac{1}{2(1+x^2)}$.

3. Montrer que $\varphi(x)+\varphi\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{3\pi}{4}$ pour tout $x \in]0,+\infty[$.

4. Soit $u_n=\dfrac{1}{n+1}\sum\limits_{k=n}^{2n}\varphi(k)$.

   a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $\varphi(n) \leq u_n \leq \varphi(2n)$.

   b) En déduire que la suite (u_n) est convergente et donner sa limite.

Exercice1

1. a) $OA = OC$ et $\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CO}\right)\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$, donc OAC est équilatéral de plus $OA = OB$ (Car ABC rectangle en A).
Donc $AC = OB \neq 0$. Il existe donc un unique déplacement f qui transforme O en A et B en C.
b) $\left(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{AC}\right)\equiv\left(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{AC}\right)\equiv\pi+\left(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CA}\right)[2\pi]\equiv\frac{2\pi}{3}[2\pi]$. Donc f est une rotation d'angle $\frac{2\pi}{3}$.
c) Comme (IO) médiatrice de $[BC]$ alors $\left(\overrightarrow{IB},\overrightarrow{IO}\right)\equiv\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{IB},\overrightarrow{IC}\right)\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$ ou bien
$\left(\overrightarrow{IB},\overrightarrow{IO}\right)\equiv\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{IB},\overrightarrow{IC}\right)\equiv\frac{\pi}{3}+\pi[2\pi]$ le deuxième cas étant impossible donc $\left(\overrightarrow{IB},\overrightarrow{IO}\right)\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$.
A étant l'image de O par f alors $\left(\overrightarrow{IO},\overrightarrow{IA}\right)\equiv\frac{2\pi}{3}[2\pi]$.
d) $\left(\overrightarrow{IA},\overrightarrow{IB}\right)\equiv\left(\overrightarrow{IA},\overrightarrow{IO}\right)+\left(\overrightarrow{IO},\overrightarrow{IB}\right)[2\pi]\equiv-\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{3}[2\pi]\equiv\pi[2\pi]$. Donc I appartient au segment $[AB]$.
$\cos AIC=\frac{AI}{IC}=\frac{AI}{BI}=\frac{1}{2}\Rightarrow IB=2IA$. Comme $I\in[AB]$ alors $\overrightarrow{IB}=-2\overrightarrow{IA}\Leftrightarrow 2\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\overrightarrow{O}$ et par suite I est le barycentre des points pondérés $(A, 2)$ et $(B, 1)$.
2. a) $f\circ r$ est un déplacement comme composée de deux rotations l'angle de ce déplacement est π donc $f\circ r$ est une symétrie centrale et comme $f\circ r(A)=A\Rightarrow f\circ r=S_A$.
b) $\left(\overrightarrow{IO},\overrightarrow{IC'}\right)\equiv\left(\overrightarrow{IO},\overrightarrow{IC}\right)+\left(\overrightarrow{IC},\overrightarrow{IC'}\right)[2\pi]\Rightarrow\left(\overrightarrow{IO},\overrightarrow{IC'}\right)\equiv\frac{\pi}{3}+\frac{2\pi}{3}[2\pi]\equiv\pi[2\pi]$. Donc les points O, I et C' sont alignés.
3. a) *On sait qu'une isométrie conserve l'orthogonalité.*
$(OI)\perp(OB)$ et $g(O)=A$ et $g((OB))=(AC)$ donc $g((OI))$ est la droite perpendiculaire à (AC) passant par A. Donc $g((OI))=(AB)$.
On sait qu'un antidéplacement échange les mesures des angles orientés en leurs opposés.
On a $\left(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OA}\right)\equiv-\frac{2\pi}{3}[2\pi]$ et donc si $A' = g(A)$ alors $\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AA'}\right)\equiv\frac{2\pi}{3}[2\pi]$ mais comme
$\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{OA}\right)\equiv\frac{2\pi}{3}[2\pi]$. D'où $g((OA))=(OA)$.
b) g est un antidéplacement $med[OA]\neq med[BC]$ alors g est une symétrie glissante, *il existe donc une droite* Δ *unique et un seul vecteur* $\vec{u}$ *directeur de* Δ *tels que* $g=S_\Delta\circ t_{\vec{u}}=t_{\vec{u}}\circ S_\Delta$.
$g(B)=C$ donc le milieu O de $[BC]$ est un point de la droite Δ.
$A=g(O)=t_{\vec{u}}\circ S_\Delta(O)=t_{\vec{u}}(O)\Rightarrow\vec{u}=\overrightarrow{OA}$.
Finalement $g=S_{(AO)}\circ t_{\overrightarrow{OA}}=t_{\overrightarrow{OA}}\circ S_{(AO)}$.

Exercice2

f la fonction définie sur $[2,+\infty[$ par : $f(x)=\sqrt{1-sin\left(\frac{\pi}{x}\right)}$.

1. a) **Dérivabilité de f à droite en 2.**

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}\frac{\sqrt{1-sin\left(\frac{\pi}{x}\right)}}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}\frac{cos\left(\frac{\pi}{x}\right)}{x-2}\times\frac{1}{\sqrt{1+sin\left(\frac{\pi}{x}\right)}}=\frac{\pi\sqrt{2}}{8}$$. Donc

f est dérivable à droite en 2 et $f_d^{'}(2)=\frac{\pi\sqrt{2}}{8}$.

b) Variations de f puis traçage de $\mathscr{C}$.

$u:x\mapsto 1-sin\left(\frac{\pi}{x}\right)$ est dérivable sur $[2;+\infty[$ et $\forall x\succ 2;\ u(x)\succ 0$ donc $f=\sqrt{u}$ est dérivable sur $]2;+\infty[$ et

$$f'(x)=\frac{\frac{\pi}{x^2}cos\left(\frac{\pi}{x}\right)}{2\sqrt{1-sin\left(\frac{\pi}{x}\right)}}=\frac{\pi}{2x^2}\frac{\sqrt{1-sin\left(\frac{\pi}{x}\right)}\sqrt{1+sin\left(\frac{\pi}{x}\right)}}{\sqrt{1-sin\left(\frac{\pi}{x}\right)}}=\frac{\pi}{2x^2}\sqrt{1+sin\left(\frac{\pi}{x}\right)}$$

Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\pi}{x}=0\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}sin\left(\frac{\pi}{x}\right)=0 \text{ et donc } \lim_{x\to+\infty}f(x)=1$$

f est donc strictement croissante sur $[2;+\infty[$ et elle est a valeurs dans $[0;1[$. Voir courbe ci-dessous.

2. a) **Montrons que f admet une fonction réciproque g définie sur $J=[0,1[$.**

f est continue et strictement croissante sur $[2;+\infty[$ donc f réalise une bijection de cet intervalle sur son image $[0;1[$, par suite f admet sur $[2;+\infty[$ une fonction réciproque notée g définie sur $J=[0,1[$.

b) **Construction de la courbe $\mathscr{C}'$ de g dans le même repère que $\mathscr{C}$.**

Compléter la figure.

3. a) **Calcul de $g'\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.**

Vérifier que $f(6)=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

$$g'\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{1}{f'\left(g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)}=\frac{1}{f'(6)}=\frac{24\sqrt{6}}{\pi}.$$

b) **Dérivabilité de $\frac{1}{g}$.**

Remarquons que g est a valeurs dans $[2;+\infty[$, donc g ne s'annule pas sur $[0;1[$.

f est dérivable sur $[2;+\infty[$ et f'ne s'annule pas sur cet intervalle alors g est dérivable sur $[0;1[$ et pour tout x

réel de $]0;1[$; $\left(\frac{1}{g}\right)'(x)=\frac{-g'(x)}{(g(x))^2}$ avec $x=f(y)$.

Donc $\left(\frac{1}{g}\right)'(x)=\frac{-1}{y^2f'(y)}=\frac{-1}{y^2\frac{\pi}{2y^2}\sqrt{1+sin\left(\frac{\pi}{y}\right)}}=\frac{-2}{\pi\sqrt{1+sin\left(\frac{\pi}{y}\right)}}$.

Or $x=\sqrt{1-sin\left(\frac{\pi}{y}\right)}\Leftrightarrow x^2=1-sin\left(\frac{\pi}{y}\right)\Leftrightarrow sin\left(\frac{\pi}{y}\right)=1-x^2$. D'où $\left(\frac{1}{g}\right)'(x)=\frac{-2}{\pi\sqrt{2-x^2}}$. (**Vérifier que ce résultat reste valable pour $x = 0$**).

4. a) **Pour n entier naturel supérieur ou égale à 2 ; $\frac{n+1}{n}g\left(\frac{1}{2n}\right)\le u_n\le\frac{n+1}{n}g\left(\frac{1}{n}\right)$.**

On a $0\le k\le n\Leftrightarrow n\le n+k\le 2n\Rightarrow\ 0\prec\frac{1}{2n}\le\frac{1}{n+k}\le\frac{1}{n}\prec 1$.Or g est strictement croissante sur $[0;1[$ alors

$$g\left(\frac{1}{2n}\right)\le g\left(\frac{1}{n+k}\right)\le g\left(\frac{1}{n}\right)\Rightarrow\sum_{k=0}^{n}g\left(\frac{1}{2n}\right)\le n\,u_n\le\sum_{k=0}^{n}g\left(\frac{1}{n}\right)\Leftrightarrow(n+1)g\left(\frac{1}{2n}\right)\le n\,u_n\le(n+1)g\left(\frac{1}{n}\right).$$

Finalement $\frac{n+1}{n}g\left(\frac{1}{2n}\right)\le u_n\le\frac{n+1}{n}g\left(\frac{1}{n}\right)$.

b) **Convergence de la suite u et sa limite.**

On a $\frac{n+1}{n}g\left(\frac{1}{2n}\right)\le u_n\le\frac{n+1}{n}g\left(\frac{1}{n}\right)$

$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{2n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$ et $\lim\limits_{x\to 0}g(x)=2$

$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n+1}{n}\lim\limits_{n\to+\infty}1+\frac{1}{n}=1$. Donc par comparaison la suite u converge et sa limite est 2.

5. a) ***H* est impaire.**

Si x est dans $[-1;1]$ alors $-x$ est dans $[-1;1]$. Posons $t(x)=H(-x)+H(x)$.

t est dérivable sur $[-1;1]$ et $t'(x)=-H'(-x)+H'(x)=-h(-x)+h(x)=0$ car h est paire.

Alors $t(x)=t(0)=H(0)+H(0)=2H(0)=0\Rightarrow H(-x)=-H(x)$ et H est impaire.

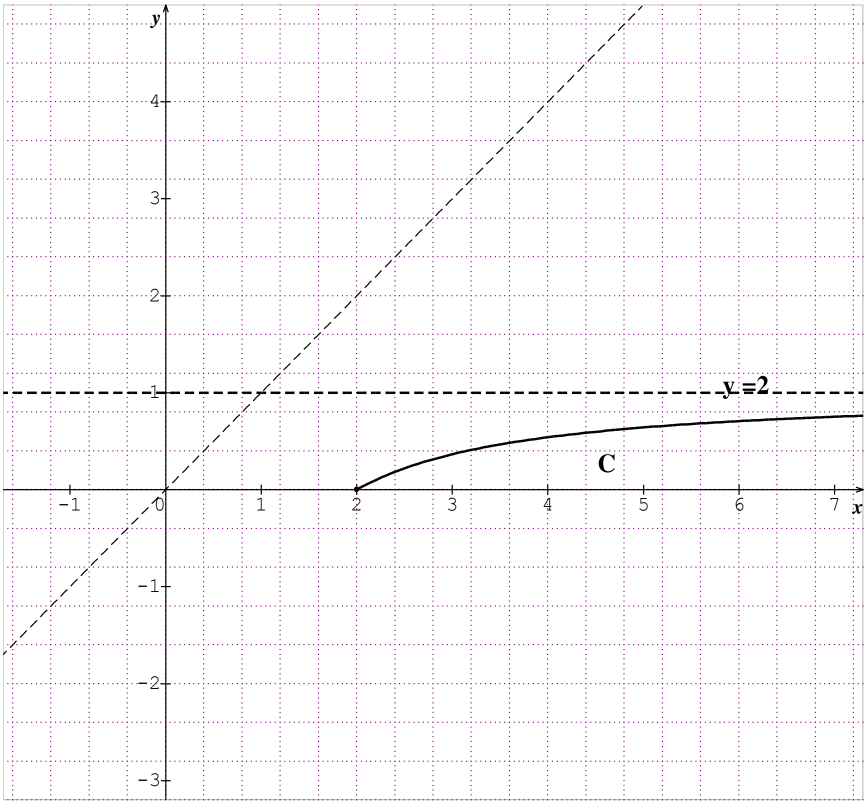
b) **Pour tout x de $[0,1[$ on a : $1-4H(x)=\frac{2}{g(x)}$.**

On a $h(x)=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{g}\right)'(x)\Rightarrow H(x)=\frac{1}{2g(x)}+c$; $c\in\mathbb{R}$.

Or $g(0)=2$ donc $H(0)=0$ et par suite $c=\frac{1}{4}\Rightarrow H(x)=\frac{-1}{2g(x)}+\frac{1}{4}\Rightarrow 1-4H(x)=\frac{2}{g(x)}$.

c) Variations de H et courbe.

$H'(x)=h(x)\succ 0$ et $\lim\limits_{x\to 1}H(x)=\frac{1}{4}$. Compléter ce qui reste.



Exercice 3

1. a) $x \succ 0\,;\, f(x) = \dfrac{x}{x \times \sqrt{\dfrac{2}{x} - 1}} = \dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{2}{x} - 1}}$ et donc $\lim\limits_{0} f = 0 = f(0)$; f est alors continue en 0.

   Pour $x \succ 0\,;\, \dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{1}{\sqrt{2x - x^2}}$ et donc $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$ donc f n'est pas dérivable à droite en 0.

   b) f est dérivable sur $]0,2[$ ($2x - x^2 = x(2-x) \succ 0$ sur $]0,2[$).

   $\forall x \in]0,2[\quad f'(x) = \dfrac{\sqrt{2x - x^2} - x\dfrac{2-2x}{2\sqrt{2x - x^2}}}{2x - x^2} = \dfrac{x}{(2x - x^2)\sqrt{(2x - x^2)}} \succ 0$. f étant continue sur $[0,2[$ et

   $\forall x \in]0,2[, f'(x) \succ 0$ alors f est strictement croissante sur $[0,2[$.

2. f est continue et elle est strictement croissante sur $[0,2[$ donc elle réalise une bijection de $[0,2[$ sur

   $f([0,2[) = \mathbb{R}_+$. f^{-1} existe définie sur $\mathbb{R}_+$.

3. a) Pour $x \in [0,2[$, $f(x) - x = x\left(\dfrac{1}{\sqrt{2x - x^2}} - 1\right) = x\left(\dfrac{1 - \sqrt{2x - x^2}}{\sqrt{2x - x^2}}\right) = x\left(\dfrac{1 - 2x + x^2}{\sqrt{2x - x^2}\left(1 + \sqrt{2x - x^2}\right)}\right) \Rightarrow$

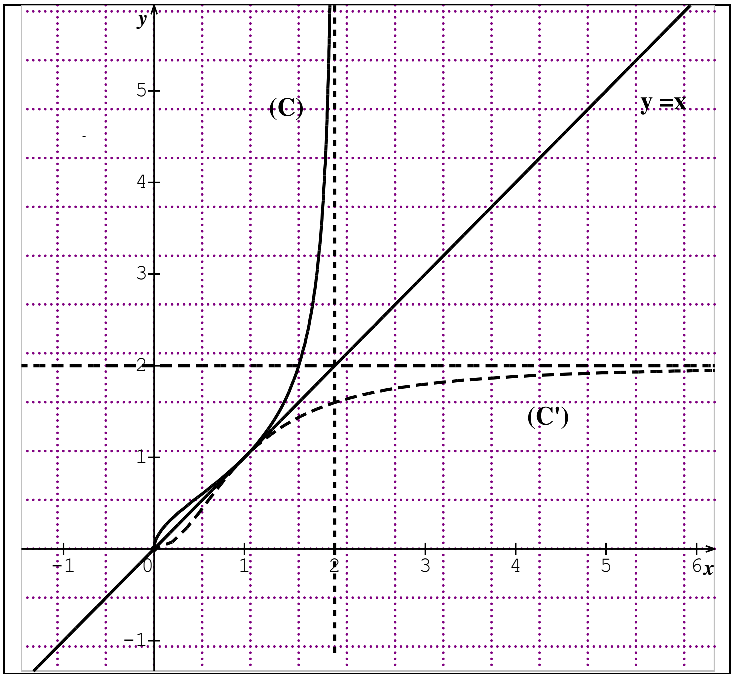
   $f(x) - x = \left(\dfrac{x(1-x)^2}{\sqrt{2x - x^2}\left(1 + \sqrt{2x - x^2}\right)}\right)$. Donc $\forall x \in [0,2[\,;\; f(x) - x \geq 0$.

$f(x)=x \Leftrightarrow x=0 \quad ou \quad x=1$

4. a) f est une bijection de $[0,2[$ sur $\mathbb{R}_+$. Pour n entier strictement positif, $\frac{1}{n}\in\mathbb{R}_+$ donc l'équation $f(x)=\frac{1}{n}$ admet une solution unique $\alpha_n\in[0,2[$. Ainsi $f(\alpha_n)=\frac{1}{n}$.

b) $f(\alpha_n)=\frac{1}{n}$ et $f(\alpha_{n+1})=\frac{1}{n+1}$ comme f est strictement croissante sur $[0,2[$ alors $\alpha_n \succ \alpha_{n+1}$ et la suite (α_n) est décroissante comme de plus elle est minorée par 0 elle converge.

Soit $l=\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ On a f est continue sur $[0,2[$ et



$f(\alpha_n)=\frac{1}{n}$ par passage à la limite on aura $f(l)=0\Leftrightarrow l=0$.

B- 1.a) $h(x)=\frac{1}{sin(2x)}-f\left(2cos^2x\right)=\frac{1}{sin(2x)}-\frac{2cos^2x}{\sqrt{4cos^2x-4cos^4x}}=\frac{1}{sin(2x)}-\frac{cosx}{\sqrt{sin^2x}}=\frac{1}{sin(2x)}-\frac{cosx}{|sinx|}$

avec $sinx\succ 0$ donc

$$h(x)=\frac{1}{sin(2x)}-\frac{cosx}{sinx}=\frac{1}{sin(2x)}-\frac{2cos^2x}{sin2x}=-\frac{cos2x}{sin2x}=-cotan(2x).$$

b) h est dérivable sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ et $h'(x)=2\left(1+cotan^2(2x)\right)\succ 0$, h est une bijection de $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ sur son image qui est $\mathbb{R}$.

$\varphi=h^{-1}$ existe définie sur $\mathbb{R}$.

$\varphi(0)=x\,;\; x\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[\Leftrightarrow h(x)=0\Leftrightarrow -cotan2x=0\Leftrightarrow 2x=\frac{\pi}{2}+k\pi, k\;,\; k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}.$

D'où $\varphi(0)=\frac{\pi}{4}$.

$\varphi(1)=x\,;\; x\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[\Leftrightarrow h(x)=1\Leftrightarrow -cotan2x=1\Leftrightarrow 2x=-\frac{\pi}{4}+k\pi, k\;,\; k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}.$

D'où $\varphi(1)=\frac{3\pi}{8}$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=\frac{\pi}{2}$ car $\lim\limits_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-} h(x)=+\infty$.

2. h est dérivable sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ et h' ne s'annule pas sur cet intervalle donc φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x\in\mathbb{R}$

$$\varphi'(x)=\frac{1}{h'(y)}=\frac{1}{2\left(1+cot^2 2y\right)} \text{ avec } y=\varphi(x)$$

$y=\varphi(x)$, $x\in\mathbb{R}$ $x=h(y)$, $y\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[\Leftrightarrow x=-cot2y$. D'ou $\varphi'(x)=\frac{1}{2\left(1+x^2\right)}$.

3. Posons $g(x)=\varphi(x)+\varphi\left(\frac{1}{x}\right)$. g est dérivable sur $]0,+\infty[$ et $g'(x)=\varphi'(x)-\frac{1}{x^2}\varphi'\left(\frac{1}{x}\right)\Rightarrow$

$$g'(x)=\frac{1}{2\left(1+x^2\right)}-\frac{1}{x^2}\frac{1}{2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}=\frac{1}{2\left(1+x^2\right)}-\frac{1}{2\left(1+x^2\right)}=0 .$$

$g'(x)=0, \forall x\in]0,+\infty[$ donc $g(x)=cste=g(1)=2\varphi(1)=\frac{3\pi}{4}$. Donc $\forall x\in]0,+\infty[, \varphi(x)+\varphi\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{3\pi}{4}$.

4. φ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Donc si $n\le k\le 2n$ alors $\varphi(n)\le\varphi(k)\le\varphi(2n)$ et par sommation

$$\sum_{k=n}^{2n}\varphi(n)\le\sum_{k=n}^{2n}\varphi(k)\le\sum_{k=n}^{2n}\varphi(2n)\Leftrightarrow(n+1)\varphi(n)\le(n+1)u_n\le(n+1)\varphi(2n)\Leftrightarrow\varphi(n)\le u_n\le\varphi(2n)$$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=\frac{\pi}{2}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\varphi(n)=\lim\limits_{n\to+\infty}\varphi(2n)=\frac{\pi}{2}\Rightarrow\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\frac{\pi}{2}$.