LPA M^{me} Mahjoubi Besma	SERIE N°1	Septembre 2021 4ème Math

EXERCICE 1 :

Déterminer les ensembles suivants :

$E1 = \{ M(z) \,/\, |z+3i| = |i\bar{z}+2-i| \}$

$E2 = \{ M(z) \,/\, arg\ (z+2-i) \equiv \frac{\pi}{6}\ [2\pi] \}$

$E3 = \{ M(\sin 2\theta + i) \,\epsilon\, P \,/\, \theta \,\epsilon\, [0,\pi] \}$

$E4 = \{M(z) \,\epsilon\, P \,/\, \arg(z-1+2i) \equiv \arg(-\bar{z}+1+2i)\,(2\pi) \}$

$E5 = \{ M(2iz+3) \,\epsilon\, P/\ \arg(z)\ \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi] \}$

$E6 = \{ M(z) \,\epsilon\, P/\ z^2+z+1 \,\epsilon\, \mathbb{R} \}$

$E7 = \{ M(\,2iz-1) \,/\, |z+2| = \sqrt{2} \}$

$E8 = \{ M(\,2iz-1) \,/\, \arg(z+2) \equiv \frac{\pi}{3}\ [\pi] \}$

$E9 = \{ M\ (z) \,\epsilon\, P/ \arg(z-1+i)^3 \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi] \}$

EXERCICE 2 :

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct du plan $(o,\vec{u},\vec{v})$, soit ABC un triangle équilatéral direct inscrit dans le cercle C $(o,|a|)$ tel que $A(a)$, $B(b), C(c)$; $a \,\epsilon\, \mathbb{C}^*$

1) Ecrire b *et* c en fonction de a .

2) Soit M le point d'affixe $z_n = a^3$, déterminer A pour que le point M soit le milieu de $[BC]$.

3) Dans cette question le point A décrit le cercle $\mathcal{C}$: $x^2+(y-1)^2 = 4$

, déterminer l'ensemble des points N tels que le quadrilatère $ABNC$ soit un losange

EXERCICE 3 :

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé(O, $\vec{u}$, $\vec{v}$) , On pose A (2i) et B (2)

1/ Déterminer l'ensemble E =$\{z \in \mathbb{C}, |z-2i| = |z-2|\}$

2/ a) Montrer que si $z \in E$ Alors arg($z-2i$) + arg($z-2$) $\equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$

b) En déduire que si $z \in E$ Alors $z = i\,\bar{z}$

3/ Pour tout $z \neq 2$ et $z \neq 2i$ on pose z' = $\frac{z-2i}{\bar{z}-2}$

a) Vérifier que arg(z')≡ arg($z-2i$) + arg($z-2$) $[2\pi]$

b) En déduire que si M(z) appartient à la médiatrice de $[AB]$alors z' = i
c) Déterminer l'ensemble F des points M(z) tel que z' ∈ $\mathbb{R}^*$

EXERCICE 4 :

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(o,\vec{u},\vec{v})$, on considère le points distincts $A, B, C\ et\ D$ d'affixes respectives $a, b, c\ et\ d$ tel que $|a| = |b| = |c| = |d|$ et $ABCD$ un quadrilatère convexe .

Montrer que $ABCD$ est un rectangle si et seulement si $a + b + c + d = 0$.

EXERCICE 5 :

1) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(o,\vec{u},\vec{v})$, on considère les points $A, M\ et\ N$ d'affixes respectives $-1 + i$, $i + \cos\theta + i\sin\theta$, $i - \cos\theta - i\sin\theta$.

a) Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{AM}\ et\ \overrightarrow{AN}$ sont orthogonaux.

b) Montrer que lorsque θ varie dans l'intervalle $]0,\pi[$ les points $M\ et\ N$ varient sur un cercle $\mathcal{C}$ que l'on précisera.

3) a) Déterminer en fonction de θ l'aire $A(\theta)$ du triangle AMN.

b) Déterminer la valeur de θ pour laquelle l'aire $A(\theta)$ est maximale et placer dans ce cas les points $M\ et\ N$ sur ce cercle $\mathcal{C}$.

EXERCICE 6 :

Dans le plan complexe P muni d'un repère orthonormé $(o,\vec{u},\vec{v})$, on considère le point A d'affixe i et soit $f : M(z) \to M'(z')$ tel que $z' = i + \frac{1}{\bar{z}+i}$ avec $z \neq i$.

1) Déterminer l'ensemble des points invariants par f.

2) Montrer que les points $A, M\ et\ M'$ sont alignés.

3) Montrer que pour tout $M\ de\ P$; $\overrightarrow{AM}\,.\overrightarrow{AM'} = 1$.

4) a) Montrer que z' est réel si et seulement si $\left|z - \frac{1}{2}i\right| = \frac{1}{2}$.

b) Construire alors le point M' image d'un point M du cercle, de diamètre $[OA] - \{A\}$.

EXERCICE 7 :

Le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormé $(o,\vec{u},\vec{v})$.

1) Soit a un nombre complexe dont la partie imaginaire est non nulle et z une solution de l'équation $(z - \bar{a})^n = (z - a)^n$. Montrer que z est un réel.

2) Soit $z \epsilon \mathbb{C}$. Montrer que si $|z| = 1$ alors $1 + z + \frac{1}{z} \epsilon \mathbb{R}$.

3) Soit $z \epsilon \mathbb{C} \backslash\{0,1\}$. Montrer que si $|z| = |z - 1|$ alors $\arg(z) + \arg(z - 1) \equiv \pi[2\pi]$

4) Soit $M(z)$ et $M'(z')$. Montrer que si $|z-z'| = |z+z'|$ alors $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{OM'}$ sont orthogonaux.

EXERCICE 8 :

Le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormé direct $(o, \vec{u}, \vec{v})$. On considère le point A d'affixe 1 et l'application $f : P \to P$

$$M(z) \longmapsto M'(z') \text{ tel que } z' = 2z - z^2.$$

1) Déterminer les points invariants par f.

2) On désigne par M_1 et M_2 les points d'affixes respectives z^2 et $2z$

a) Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ tels que les points O, M_1 et M_2 soient alignés.

b) On suppose que M n'appartient pas à l'axe des abscisses.

Montrer que OM_1M_2M' est un parallélogramme

3) On suppose que M appartient au cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon 1.

a) Montrer que $AM = MM'$ et que $\frac{z'-1}{z}$ est réel.

b) En déduire que A et M' sont symétrique par rapport à la tangente Δ à $\mathcal{C}$ en M.

EXERCICE 9 : Questions indépendantes

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$

1) Soit Z un nombre complexe d'argument $\frac{\pi}{5}$ tel que $|Z| = |Z-1|$.

Déterminer un argument de $1 - Z$.

2) A(a) , B(b) et C(c) sont les sommets d'un triangle .

Montrer que : ABC est équilatéral si et seulement si $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ac$.

3) Soit A, B et C trois points d'affixes respectifs a, b et c.

Montrer que A, B et C sont alignés si et seulement si $a\bar{b} + b\bar{c} + c\bar{a} \in \mathbb{R}$