Exercice 1 :

Le plan étant muni d'un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

On considère $M_1\left(z_1\right)$ et $M_2\left(z_2\right)$ deux points tels que , M_1 et M_2 distincts deux à deux et non alignés.

Soit $M\left(z\right)$ tel que $z=\dfrac{2z_1z_2}{z_1+z_2}$

1) a) Montrer que $\dfrac{z_1-z}{z_2-z}\times\dfrac{z_2}{z_1}=-1$

   b) Déduire que M appartient à $C_{OM_1M_2}$

2) Montrer que si $z_2=\overline{z_1}$ alors $M\in\left(O,\vec{u}\right)$

3) Soit r la rotation de centre O d'angle $\alpha\in\left]0,\pi\right[$ qui transforme M_1 en M_2 avec $z_2=\overline{z_1}$

   a) Exprimer z_2 en fonction de z_1 et α

   b) Déduire que $M\in$ *med* $\left[M_1M_2\right]$

4) Soit θ un réel de $\left]0,\pi\right[$

   On suppose que z_1 et z_2 sont solutions de l'équation $6t^2-\left(e^{i\theta}+1\right)t+\left(e^{i\theta}-1\right)=0$

   a) Sans calculer z_1 et z_2, vérifier que $z=2\dfrac{e^{i\theta}-1}{e^{i\theta}+1}$

   b) Donner la forme exponentielle de z en fonction de θ

Exercice 2 :

Le plan complexe P est muni d'un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O},\vec{u},\vec{v}\right)$. Soit $\alpha\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$.

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2-2z+2=0$.
2) On considère les points A,B,C et D d'affixes respectives $z_A=2i$, $z_B=\left(1+i\right)e^{i\alpha}$ et $z_C=\left(1-i\right)e^{i\alpha}$

   a) Ecrire z_B et z_C sous forme exponentielle.

   b) En déduire que le triangle OBC est rectangle isocèle en O.

   c) Pour quelle valeur de α le quadrilatère $OABC$ est-il un parallélogramme ?
3) A tout point $M(z)$ on associe le point $M'(z')$ tel que $z'=2+(z-2)^2$.

   On note $\mathcal{C}$ le cercle de centre $K(2)$ et de rayon $\sqrt{2}$.

   a) Déterminer z' pour $z=z_A$

   b) Soit M le point de $\mathcal{C}$ d'affixe $z=2+\sqrt{2}e^{i\alpha}$

   Montrer que l'affixe de M' est $2+2e^{i2\alpha}$.

   Déterminer et construire , l'ensemble des points M' lorsque α varie dans $[0,\frac{\pi}{2}]$

4) Soit N le point d'affixe $z_N=2+\dfrac{\sqrt{2}+i\sqrt{6}}{2}$ et N' le point associé à N.

   a) Ecrire z_N-2 sous forme exponentielle , en déduire que N est un point de $\mathcal{C}$.

b) Montrer que : $\left(\vec{u},\overrightarrow{KN'}\right)\equiv\dfrac{2\pi}{3}[2\pi]$

c) Placer N sur la figure puis construire le point N'.

Exercice 3 :

Soit $f : z'=\dfrac{1}{2}(z+\dfrac{1}{z})$

1) Soit E(-i) ; Déterminer l'affixe du point E'=f(E)
2) Déterminer l'ensemble des points fixes par f.
3) On note A(1) et B(-1) et M un point du plan distinct des points O,A et B .

   a) Mque pour tout $z\in C-\{0;1;-1\}$, on a : $\dfrac{z'+1}{z'-1}=\left(\dfrac{z+1}{z-1}\right)^2$

   b) En déduire une expression de $\dfrac{M'B}{M'A}$ en fonction de $\dfrac{MB}{MA}$ puis une expression de $\left(\overrightarrow{M'A};\overrightarrow{M'B}\right)$ en fonction de $\left(\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}\right)$.

4) Soit $\Delta=med[AB]$ .Mque si M est un point de Δ distinct de O , alors M' est un point de Δ
5) Soit C le cercle de diamètre $[AB]$.

   a) Mque si $M\in C$ alors le point $M'\in(AB)$.

   b) Tout point de (AB) a-t-il un antécédent par f ?

Exercice 4 :

Dans le plan complexe muni du repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

On considère le cercle ($\mathcal{C}$) de centre O et de rayon 2 et $A(2)\in\mathcal{C}$

Soit B et C les points d'affixes respectives $u=1+i\sqrt{3}$ et $\bar{u}$

1) Montrer que $u^2-4u=2\bar{u}-8$
2) Justifier que B et C sont deux points de ($\mathcal{C}$)
3) Soit D le point d'affixe $z_D=2e^{i\theta}$ où $\theta\in[-\pi,\pi]$

   On note E le point de ($\mathcal{C}$) tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{OD},\overrightarrow{OE}}\right)\equiv\dfrac{\pi}{3}[2\pi]$ et on note z_E l'affixe de E. Montrer que $z_E=ue^{i\theta}$

4) On note F et G les milieux respectifs des segments $[BD]$ et $[CE]$

   a) Justifier que $z_F=\dfrac{u}{2}+e^{i\theta}$ et $z_G=\dfrac{ue^{i\theta}+\bar{u}}{2}$

   b) Démontrer que $\dfrac{z_G-2}{z_F-2}=\dfrac{u}{2}$

   c) Quelle est la nature du triangle AFG ?

Exercice 5 :

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$

Soit m un nombre complexe non nul et on considère dans $\mathbb{C}$ l'équation : $E_m=iz^2-2imz-4m^2(1-i)=0$

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation E_m. On notera z' et z'' les solutions de E_m telles que $|z'|<|z''|$
2) Soit M' et M'' les points d'affixes respectives : $z'=2m$ et $z''=2m(-1+i)$

Soit N l'image de M' par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$

a) Déterminer l'affixe du point N

b) Montrer que $OM'NM''$ est un parallélogramme

c) En déduire une construction de M'' à partir de M'

3) On pose $\omega = -i\overline{z'} + 1 + i$, montrer que $W(\omega)$ est l'image de M' par une isométrie

4) On prend $m = e^{i\theta}$, $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Déterminer et construire l'ensemble des points W quand θ varie dans $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Exercice 6 :

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$: $z^2 + i\left(e^{i\theta} - 2\right)z + e^{i\theta} - 1 = 0$, $\theta \in \mathbb{R}$

2) Le plan P est rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$, on désigne par B et M les points d'affixes $z_B = i$ et $z_M = i - ie^{i\theta}$

   Déterminer l'ensemble des points M quand θ varie dans $\left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$

3) Soit A d'affixe 1, on considère l'application $f : P \setminus \{B\} \to P$

$$M(z) \mapsto M'(z') \text{ tel que } z' = \frac{\overline{z} - i}{\overline{z} + i}$$

a) Montrer que si $z \neq i$ et $|z| = 1$ alors z' est imaginaire .

b) Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{AM'}$ et $\overrightarrow{BM}$ sont orthogonaux.

c) Construire le point M' si M désigne un point du cercle de centre O et de rayon 1 privé du point B

4) Soit l'équation $(E) : \left(\overline{z} - i\right)^3 = \left(\overline{z} + i\right)^3$

a) Montrer que si z est solution de (E) alors z est réel.

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ $z^3 = 1$, en déduire les solutions de l'équation (E)