Exercice 1 :

Le plan complexe P est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$. Soit $\alpha \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2-2z+2=0$.
2) On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives $z_A=2i$, $z_B=\left(1+i\right)e^{i\alpha}$ et $z_C=\left(1-i\right)e^{i\alpha}$

   a) Ecrire z_B et z_C sous forme exponentielle.

   b) En déduire que le triangle OBC est rectangle isocèle en O.

   c) Pour quelle valeur de α le quadrilatère $OABC$ est-il un parallélogramme ?
3) A tout point $M(z)$ on associe le point $M'(z')$ tel que $z' = 2+(z-2)^2$.

   On note C le cercle de centre $K(2)$ et de rayon $\sqrt{2}$.

   a) Déterminer z' pour $z = z_A$

   b) Soit M le point de C d'affixe $z=2+\sqrt{2}e^{i\alpha}$

   Montrer que l'affixe de M' est $2+2e^{i2\alpha}$.

   Déterminer et construire , l'ensemble des points M' lorsque α varie dans $[0,\frac{\pi}{2}]$
4) Soit N le point d'affixe $z_N=2+\dfrac{\sqrt{2}+i\sqrt{6}}{2}$ et N' le point associé à N.

   a) Ecrire z_N-2 sous forme exponentielle , en déduire que N est un point de C .

   b) Montrer que : $\left(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{KN'}}\right)\equiv\frac{2\pi}{3}[2\pi]$

   c) Placer N sur la figure puis construire le point N'.

Exercice 2 :

I/ On considère dans l'ensemble des nombres complexes l'équation (E) :

$Z^3-(1+e^{i\theta})Z^2+(1+e^{i\theta})Z-1=0$; $\theta\in]-\pi, 0[$

1) Montrer que l'équation (E) admet trois solutions distinctes dont deux seulement non réelles.

   On note Z_1 et Z_2 les solutions non réelles .
2) Soit K le milieu des points M_1 et M_2 d'affixes respectives Z_1 et Z_2 .

   Déterminer et construire l'ensemble Γ décrit par le point K lorsque θ varie dans $]-\pi, 0[$

II/ Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

On considère les points A et B d'affixes respectives 1 et –1 .

1) a) Montrer que : $\frac{(Z_2+1)(Z_1-1)}{(Z_2-1)(Z_1+1)} = -1$.

b) En déduire que les points A, B, M_1 et M_2 appartiennent à un même cercle.

2)a) Montrer que $(Z_2 - Z_1)^2 = 4\ (Z_K^2 - 1)$.

b) En déduire que la bissectrice de l'angle $\widehat{AKB}$ est portée par la droite ($M_1 M_2$) .

3) Γ coupe l'axe des imaginaires en un point K .

Construire alors les points M_1 et M_2 correspondant .

Exercice 3 :

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E_p): z^2 - 2p^2 z - 1 = 0$ *où p est un nombre complexe.*

On désigne par z_1 et z_2 les solutions de (E_p) .

1) a) *Déterminer les racines quatrièmes de (-1)*

b) *En déduire les valeurs de p pour que $z_1 = z_2$*

Dans la suite de l'exercice , on pose $p = e^{i\frac{\pi}{8}}$

2) *On pose* $a = \frac{1+z_1}{p}$ *et* $a = \frac{1+z_2}{p}$

a) *Montrer que* $ab = 2$ *et* $a + b = 4\operatorname{Re}(p)$

b) *En déduire a et b sont deux réels strictement positifs.*

3) *Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct* $(O, \vec{u}, \vec{v})$

On considère les points $M(z_1)$, $N(z_2)$, $A(a)$, $B(2p^2)$ *et* $I(-1)$.

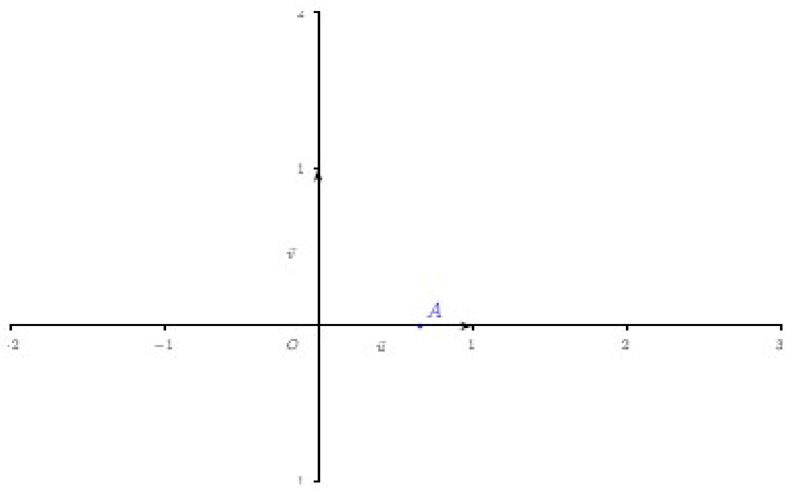
a) *Montrer que* $OA = IM$

b) *Montrer que* $(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{IM}}) \equiv \arg(p)[2\pi]$

c) *Montrer que OMBN est un parallélogramme.*

4) *On donne dans la figure ci-dessous, le point A.*

Construire les points M et N.



Exercice3 :

On munit le plan complexe d'un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$.

Dans la figure ci-dessous, (Γ) est un cercle O et de rayon $\sqrt{2}$, A, B et C sont les points d'affixes respectives 1, $i\sqrt{2}$, $-i\sqrt{2}$.

Soit Q un point du cercle (Γ) d'affixe un nombre complexe a, distinct de $i\sqrt{2}$ et $-i\sqrt{2}$.

1) On désigne par R le point d'affixe $a+\overline{a}$.

   a) Vérifier que $R\in\left(O,\vec{u}\right)$. construire R.

   b) Déterminer les nombres complexes a pour lesquels O, R et Q sont alignés.

2) Soit P le point du plan d'affixe ia et M un point d'affixe z non nul.

   a) Justifier que P est l'image de Q par une rotation R que l'on précisera. Construire P.

   b) Montrer que A, P et M sont alignés $\Leftrightarrow \left(i\overline{a}+1\right)z+\left(ia-1\right)\overline{z}=i\left(a+\overline{a}\right)$

   c) Montrer que $(AP)\perp(OM)\Leftrightarrow\left(i\overline{a}+1\right)z-\left(ia-1\right)\overline{z}=0$

   d) Soit H le projeté orthogonal de O sur (AP) . On désigne par Z_H l'affixe du point H.

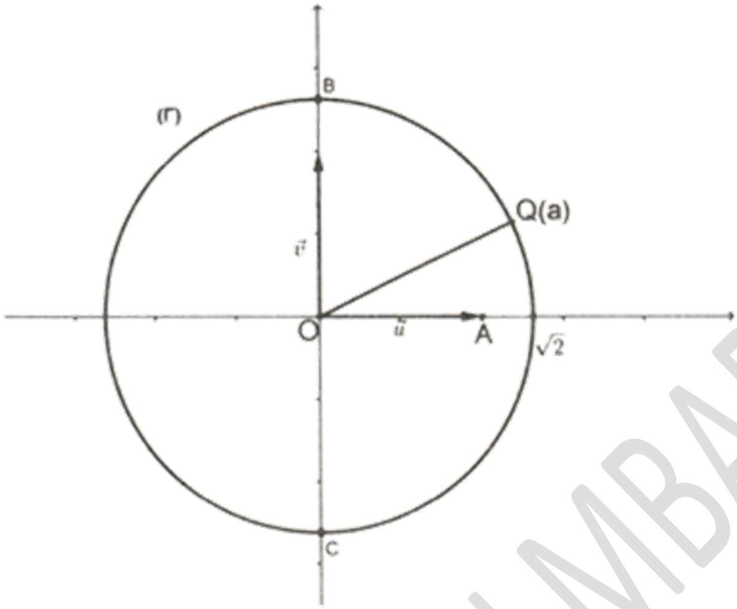
   Justifier que $Z_H=\dfrac{i\left(a+\overline{a}\right)}{2\left(i\overline{a}+1\right)}$.

3) Soit N le point d'affixe $Z_N=\dfrac{\left(a+\overline{a}\right)}{\left(i\overline{a}+1\right)}$ et $f=Roh$ où $h=h_{(O,-2)}$.

   a) Vérifier que N est l'image de H par f.

   b) Construire le point N.

c) Déterminer l'ensemble sur lequel varie le point N lorsque Q varie sur le cercle (Γ) privé des points B et C.



Exercice 4 :

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$.

A tout nombre complexe z on associe les points M, N et P d'affixes respectives z, z^4 et z^7 .

1) On considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_A=1$, $z_B=e^{i\frac{2\pi}{3}}$ et $z_C=e^{-i\frac{2\pi}{3}}$.

   Montrer que ABC est un triangle équilatéral.

2) Montrer que M et N sont confondus si et seulement si $M\in\{O,A,B,C\}$

3) On suppose que $|z|=1$.

   a) Montrer que M et N sont symétriques par rapport à l'axe $\left(O,\vec{u}\right)$ si et seulement si $z^5=1$.

   b) En déduire que M et N sont symétriques par rapport à l'axe $\left(O,\vec{u}\right)$ si et seulement si M est le sommet d'un pentagone régulier.

4) Montrer que M, N et P sont alignés si et seulement si $M\in(OA)\cup(OB)\cup(OC)$

5) On suppose que M, N et P ne sont pas alignés.

   a) Montrer que O est le centre de gravité du triangle MNP si et seulement si $z^6+z^3+1=0$.

   b) Résoudre , dans $\mathbb{C}$, l'équation : $z^6+z^3+1=0$.

Exercice 5 :

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$ *. On donne les points* $A(1)$ *,* $B(-1)$ *.*

Soit f l'application du plan qui à tout point $M(z)$ *distinct de A associe le point N d'affixe* $z'=\dfrac{z-1}{1-\overline{z}}$ *.*

1) *Déterminer l'ensemble des points invariants par f.*
2) *a) Montrer que* $|z'|=1$ *et que les points A, M et N sont alignés.*

   b) En déduire , sans calcul, que $\dfrac{z'+1}{z-1}$ *est imaginaire.*
3) *Soit* $(D): x+y-2=0$ *et* (ζ) *le cercle de centre A et de rayon* $r>0$ *. Montrer que si* $M\in(D)\cap(\zeta)$ *alors N appartient à un cercle de centre* $C(i)$ *dont on précisera le rayon.*
4) *On considère, dans* $\mathbb{C}$ *, le système* $(S):\begin{cases}\dfrac{z-1}{1-\overline{z}}=\dfrac{1}{6}(z+2)^2\\ |z|=\sqrt{2}\end{cases}$

   a) Montrer que si z est solution de (S) alors $z^3-4z^2+2z-8=0$

   b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ *le système (S)*