Il n'y a pas de plaisir plus complexe que celui de la pensée. [Jorge Luis Borges]

Exercice 1 :**Q.C.M**.

Choisir la ou (les) bonne(s) réponse(s).

1) L'ensemble des points M(z) tels que $|z| = z$ est :

a)une droite b)un cercle, c)une demi droite.

2) l'ensemble des points M(z) tels que $|z| = z+\bar{z}$ est inclus dans :

a)un cercle b) une demi-droite c)deux droites

3)Si $|z|=\sqrt{2}$ alors a) $\bar{z} = \frac{2}{z}$; b) $\bar{z} = \frac{\sqrt{2}}{z}$; c) $\bar{z} = \frac{\sqrt{2}}{2z}$

4)Si z est un nombre complexe non nul d'argument $\frac{\pi}{6}$

alors un argument de $i\bar{z}$ est

a) $\frac{-\pi}{6}$; b) $\frac{\pi}{6}$; c) $\pi/3$

Exercice 2:

Soit $Z = \frac{z-1+2i}{2iz-4}$ où $z \neq -2i$

1)Déterminer l'ensemble des points M(z) tel que Z soit réel.

2)Déterminer l'ensemble des points M(z) tel que Z soit imaginaire.

3)Déterminer l'ensemble des points M(z) ; $|Z| = \frac{1}{2}$

Exercice 3:

Soit $Z=1-\sqrt{3}+i(1+\sqrt{3})$

1)Ecrire Z^2 sous forme algébrique

2)Déterminer le module et un argument de Z^2

3)Déduire le module et un argument de Z

4)Donner les valeurs exactes de $\cos\frac{7\pi}{12}$

Exercice 4 :

Déterminer l'ensemble des points M(z) ; tels que :

a)$\arg(z-2i) = \frac{\pi}{4}\ (2\pi)$;b)$\arg(\bar{z}-i) = -\frac{\pi}{3}\ (2\pi)$;

c)$\arg(z-2i) = \arg(-z)\ (2\pi)$,

f)$\arg(z-1+i) = \arg(-\bar{z}+1+i)\ (2\pi)$

d)$|z-2i| = |\bar{z}+i|$, e)$(z+i)(\bar{z}-i)=9$

Exercice 5

I) Déterminer le(s) nombre(s) complexe(s) z vérifiant

$$\begin{cases} |z-2| = |z| \\ \arg(z) \equiv \arg(z+1+2i) \quad [2\pi] \end{cases}$$

II) a et b deux nombres complexes non nuls.

Mque $\arg(a) \equiv 2\arg(b)\ [2\pi] \iff \bar{a}b^2 \in IR_*^+$

Exercice 6:

On pose $Z = \frac{iz}{z-1}$

Déterminer et construire l'ensemble suivant

E= {M (Z) tque |z|=1};

Exercice 7:

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé

$(o,\vec{u},\vec{v})$f : P-{A(-i)} → P-{A}:M (z) → M'(z');

$z' = \frac{1-z}{1-iz}$

1) Déterminer l'ensemble E des points M (z) tels que z' soit réel.

2) a) Montrer que pour tout $z \neq i$, $z'+i = \frac{-1+i}{z+i}$

b) M que $AM.AM' = \sqrt{2}$,

et $(\vec{u},\overrightarrow{AM}) + (\vec{u},\overrightarrow{AM'}) = \frac{3\pi}{4}\ (2\pi)$

c) Déterminer l'image du cercle C de centre A et de rayon 1 par f.

d) Déterminer l'image par f de l'ensemble Δ-{A}

Où Δ : y=x-1

3)Déterminer l'image par f du cercle trigonométrique.

Exercice 8:

1°) Soit φ un réel de [-π, π] et z le nombre complexe défini par: $z = \frac{1}{2}[\sin\varphi + i(1-\cos\varphi)]$

Déterminer, en fonction deφ, le module et un argument de z.

2°) φ est un réel de] 0, π [.

Déterminer le module et un argument des nombres complexes : $a = z - i$ & $b = \frac{z}{z-i}$

3°) Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct. Soit les points M (a) et N (b).

Déterminer les ensembles décrits respectivement par les points M et N lorsque φ varie dans] 0, π [

Représenter ces ensembles.

Exercice 9:

z_1 et z_2 deux nombres complexes de module 4

Montrer que le nombre complexe $\frac{(z_1+z_2)^2}{z_1z_2}$ est un réel positif ou nul

Exercice 10:(7points)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$

On donne les points A(2i) , B(- i) et I(i)

Et l'application f : P – { I }→ P – { O }

M(z) → M'(z') tel que : $z' = \frac{2}{i+\bar{z}}$

1) a) Déterminer l'ensemble des points M(z) tel que z' est réel.

b) Déterminer l'ensemble des points M'(z') quand M varie sur le cercle de centre O et de rayon 1 privé du point I.

c) Montrer que l'ensemble des points M'(z') lorsque le point M varie sur l'axe de réel est le cercle de centre B de rayon 1 et privé de O.

2) Résoudre l'équation z' = $-2\bar{z} + 2\sqrt{3}$, mettre les solutions sous forme exponentielle.

3) a) Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{OM'}$ et $\overrightarrow{IM}$ sont colinéaires de même sens.

b) Soit M'' le symétrique du point M par rapport à l'axe des ordonnés

Déterminer z'' l'affixe de M'' en fonction de z.

4) a) Démontrer que $\frac{-i-z'}{2i-z'} = \frac{-1}{2} \cdot \frac{-i+\bar{z}}{2i+\bar{z}}$

b) Déduire que $\left(\overrightarrow{M'A}, \overrightarrow{M'B}\right) = \left(\overrightarrow{M''A}, \overrightarrow{M''B}\right)$ (π)

c) Déduire une construction géométrique du point M' connaissant M.

Exercice 11 :

1°) Résoudre dans C, l'équation

(E_θ) : $z^2 - 2iz + 1 + 2\cos 2\theta = 0$ où $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

On désigne par z' et z'' les solutions de (E_θ) telles que Im(z') < Im(z'').

2°) Dans le plan complexes rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$,

on considère les points M_1 et M_2 d'affixes

respectives $z_1 = 2\sin\theta + z'$ et $z_2 = 2i + \frac{z'}{z''}$.

Déterminer et construire l'ensemble des points M_1 et l'ensemble des points M_2 lorsque θ décrit $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

Exercice 12 :6points

Les questions 1, 2, 3, 4, et 5 sont indépendantes

1) Déterminer l'ensemble des points M(z) tel que $\left|z + \frac{1}{z}\right| = |z - i|$

2) Soit z = $\frac{i}{1+i\tan\theta}$; $\theta \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$ Donner la forme exponentielle de z

3) On considère dans C l'équation à une inconnue z ,

(E) : $z^2 - 2i\sqrt{2}\, z - 2(1+i) = 0$

a)Résoudre dans C l'équation (E).

On désigne par z_1 et z_2 les solutions de (E) ;

(Ré(z_1) < 0)

b)Donner la forme exponentielle de $\frac{z_1}{z_2}$

4) Montrer que si u et v sont deux racines troisièmes de $1+i\sqrt{3}$ alors u.v est une racine troisième de $4e^{i\frac{2\pi}{3}}$

5) Soient A(a) et B(b) deux points du cercle trigonométrique non diamétralement opposés.

a) Montrer que le nombre complexe $\frac{(a+b)^2}{ab}$ est un réel strictement positif.

b) Déduire que ;

2arg(a+b) = arg(a) + arg(b) + 2kπ ; k$\in Z$

Exercice 13 :TN2012

Soit a un réel strictement positif.

1)Résoudre dans C : $z^2-(1+i)az+ia^2=0$

2)Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(o, \vec{u}, \vec{v})$. On désigne par A et B les points d'affixes respectives a et ia.

a) Quelle est la nature du triangle OAB ?

b) Déterminer l'affixe du point C tel que OACB soit un carré.

3) Soient P et Q les points du plan tels que les triangles OAP et AQC sont équilatéraux de sens direct.

a) Montrer que l'affixe du point P est a$(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})$

b) Calculer l'affixe du point Q.

c) Montrer que les points B, P et Q sont alignés.

Exercice14 :TN2012 Scx:

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(o, \vec{u}, \vec{v})$.

On désigne par C le cercle de centre O et de rayon 1 et par I et A les points d'affixes respectives 1 et a=$\sqrt{3} + i$

1)a)Donner la forme exponentielle de a

b) Construire le point A

2)Soit B le point d'affixe b = $\frac{a-1}{1-\bar{a}}$

a)Vérifier que $\bar{b}b = 1$. En déduire que le point B appartient à C.

b) Montrer que les points A, B et I snt alignés.

c) Construire alors le point B.

3) Soit θ un argument de b

Montrer que $\cos\theta = \frac{2\sqrt{3}-3}{5-2\sqrt{3}}$ et $\sin\theta = \frac{-2\sqrt{3}+2}{5-2\sqrt{3}}$

Exercice 15:

Soit $(o, \vec{u}, \vec{v})$ un repère orthonormé direct du plan Complexe P et f l'application qui a tout point d'affixe z , associe le point M' d'affixe z'=$\frac{z+iz\bar{z}}{1+z\bar{z}}$,

A(i) ; B(-i)

1) Déterminer les points fixes de f

2) Mque les points A, M et M' sont alignés

3) Soit C le cercle de diamètre [OB]

a) Mque $\forall M\in P-\{O,B\}$, $\arg(z')\equiv \frac{\pi}{2}+(\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MO})\ [2\pi]$

b) En déduire que si $M\in C$, alors le point M' appartient à une droite fixe Δ que l'on précisera .

c) Donner une construction du point M' image d'un point M de C.

Exercice 16:

1°) Déterminer sous forme trigonométrique les solutions de l'équation : $z^3 = 4\sqrt{2}(-1+i)$.

2°) En utilisant les racines cubiques de l'unité, écrire les solutions de cette équation sous formes algébriques. Déduire des questions précédentes les valeurs de $\cos\frac{11\pi}{12}$ & $\sin\frac{11\pi}{12}$

Exercice 17:

On considère les nombres complexes z_n définis par, pour tout n : $z_0=1$ et $z_{n+1} = (\frac{3}{4}+i\frac{\sqrt{3}}{4})z_n$ et A_n d'affixe z_n.

1)Calculer sous forme algebriquez_1 et z_2

2)$\forall n\in \mathbb{N}$, on pose $d_n=|z_{n+1}-z_n|$

a)Vérifier que $\forall n\geq 1$, $z_{n+1}-z_n= (\frac{3}{4}+i\frac{\sqrt{3}}{4})(z_n-z_{n-1})$

b)En déduire une relation entre d_n et d_{n-1}, pour $n\geq 1$ puis d_n en fonction de n et d_0

c)Donner une interprétation géométrique de chacun des nombres d_n.

d)On pose $L_n = \sum_{k=0}^{k=n} A_kA_{k+1}$

Déterminer L_n en fonction de n et la limite de L_n

3)$\forall n$, on pose $a_n=\arg(z_n)\ (2\pi)$

a)Quelle est la nature de la suite (an)

b)En déduire a_n en fonction de n

c)Pour quelles valeurs de n, les points O, A_0 et A_n sont-ils alignés.

Exercice 18 :

Le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormé direct (O ,$\vec{u}$, $\vec{v}$)

A tout point M d'affixe z non réel, on associe le point M' d'affixe $z' = \frac{z\bar{z}}{\bar{z}-z}$.

1) Montrer que M' appartient à ($O,\vec{v}$).

2) Montrer que : $|z'| = |z'-z|$. Interpréter le résultat géométriquement.

3) Soit M un point n'appartenant pas à $(O,\vec{u})$. Donner une construction géométrique de M'

4) Soit M un point n'appartenant pas à $(O,\vec{u})$.

a) Montrer que $\frac{z'-z}{z'} = \frac{z}{\bar{z}}$.

b) En déduire l'ensemble E des points M pour lesquels le triangle OMM' est rectangle en M'.

Exercice 19:(6 points)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct (O,$\overrightarrow{OI}$, $\overrightarrow{OJ}$)

Soit f l'application du plan P \ { I } dans lui-même qui a tout point M(z) associe le point M'(f(z)) telle que f(z) = z' = $\frac{-1+z}{1-\bar{z}}$

1) Montrer que, pour tout $z \neq 1$, | z' | = 1,

2) Soient A et B deux points distincts d'affixes a et b différents de 1 et tels que f(A) = f(B)

a) Montrer $(a-1)(1-\bar{b}) = (1-\bar{a})(b-1)$

b) Déduire que les points A, B et I sont alignés.

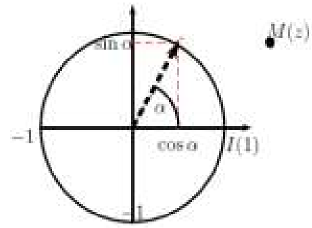
3) Soit α, un réel appartenant à $]0, 2\pi[$:

Montrer $f(e^{i\alpha}) = e^{i\alpha}$.

4) Etant donner un point M du plan d'affixe $z\neq 1$.

a) Montrer que si $z' \neq 1$ alors f(z) = f(z')

b) Déduire alors de ce qui précède une construction du point M'(z') puis le placer sur la figure ci-contre.



Exercice 20 : (6 points)

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct (O, $\overrightarrow{OI}$, $\overrightarrow{OJ}$).

À tout point M d'affixe $z \neq i$, est associé le point M' d'affixe $z' \neq 1$ définie par: $z' = \frac{\bar{z}-i}{\bar{z}+i}$

1) Déterminer l'ensemble des points M(z) tels que z' soit imaginaire non nul.

2) a) Vérifier que pour tout $z\neq 1$ on a :

$z' - 1 = \frac{-2i}{\bar{z}+i}$

b) En déduire que pour tout point M distinct de J, on a : IM' . JM = 2 et $(\overrightarrow{JM},\overrightarrow{IM'}) \equiv \frac{-\pi}{2}[2\pi]$

c) Déduire une construction du point M' lorsque M appartient au cercle C de centre J et de rayon 1.

3) a) Résoudre dans C l'équation :$z^3 = e^{\frac{i3\pi}{4}}$

b) Soit $\alpha\in]0,2\pi[$,

montrer que $z' = e^{i\alpha}$ équivaut à z = - cotan($\frac{\alpha}{2}$)

c) Déduire alors les solutions de l'équation :

$(\overline{z}-i)^3 = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i)(\overline{z}+i)^3$

Exercice 21 :(5 points)

Le but de cette question est de résoudre dans C l'équation : (E) $z^3 - 3iz + 1 - i = 0$

A cette fin, considérons le système suivant $\begin{cases} u+v=z \\ u.v=i \end{cases}$

1) a) Montrer que $u^3 + v^3 = -1 + i$ et que $u^3.v^3 = -i$

b) Déduire que u^3 et v^3 sont solution de l'équation : (E') $w^2 + (1-i)w - i = 0$

2) a) Résoudre alors l'équation (E') :

b) Déduire les valeurs possibles de u puis les valeurs possibles de v.

c) Donner alors les solutions de (E).

Exercice 22 : (3 points)

On considère n ∈ IN telle que n > 1, $\theta \in IR$ et a = $e^{i\theta}$

Soient $z_0, z_1, \dots, z_{n-1}$ les n racines de l'équations $z^n = a$

1) Montrer que les points du plan complexe dont les affixes sont : $(z_0+1)^n, (z_1+1)^n, \dots, (z_{n-1}+1)^n$ sont alignés.

2) Calculer $S = z_0 + z_1 + \dots + z_{n-1}$

3) Calculer en fonction de a le produit $P = z_0 . z_1 \dots z_{n-1}$.

Exercice 23: TN 2003

Soit E_d : $z^3 + (3 - d^2) z + 2i(1 + d^2) = 0$

Où d est un nombre complexe de module 2

1) a- Vérifier que 2i est une solution de E_d Résoudre alors l'équation E_d

2) Dans le plan complexe ($o, \vec{u}, \vec{v}$) on considère les points A(2i), B(-i), M(-i+d) et N(-i-d)

a) Calculer MN et déterminer le milieu de [MN]

b) En déduire que lorsque d varie, les points M et N appartiennent à un cercle fixe que l'on précisera.

c) Dans le cas où AMN est un triangle, montrer que O est le centre de gravité du triangle AMN.

d-En déduire les valeurs de d pour lesquelles le triangle AMN est isocèle de sommet principal A

Exercice 24:TN 2005

Dans le plan complexe P rapporte à un repère orthonormé direct(O, $\vec{u}$, $\vec{v}$), on donne le point A(1)

Soit l'application f de P dans P qui à tout point M(z) associe le point M'(z') ;$z' = \frac{1+i}{\sqrt{2}}z + 1 - \frac{1+i}{\sqrt{2}}$

1)Déterminer le nature de f et préciser ses éléments caractéristiques.

2)Soit le point M_0 d'affixe 2.

On pose pour tout entier naturel n,$M_{n+1}=f(M_n)$ on désigne par z_n l'affixe du point M_n et par Z_n l'affixe $\overrightarrow{AM_n}$

a-Montrer que $Z_1 = e^{i\frac{\pi}{4}}$

b-Montrer que pour tout n de IN , $Z_n = e^{i\frac{n\pi}{4}}$

c-En déduire l'ensemble des valeur n pour lesquelles les points A,M_0 et M_n sont alignés.

Exercice 25 (Bac 2015) :

1) a) Résoudre dans C l'équation :
(E) : $z^2 - 2z + 4 = 0$.

b) Déterminer une écriture exponentielle de chacune des solutions de (E).

2)Dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct (O, $\vec{u}$, $\vec{v}$), on considère le cercle (γ) de centre O et de rayon 2 et le point A d'affixe 2.

Placer les points B et C d'affixes respectives $2e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $2e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

3)Soit $\theta \in]-\pi,\pi]$ et M le point du cercle (γ) d'affixe $2e^{i\theta}$. On désigne par N le point de tel que ($\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}$)$\equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$.

Justifier que N a pour affixe $2e^{i(\theta+\frac{\pi}{3})}$

4) Soit r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

a)Vérifier que la rotation r a pour expression complexe ; $z' = e^{i\frac{\pi}{3}}z + 2 - 2e^{i\frac{\pi}{3}}$.

b) Soit F et K les milieux respectifs des segments [BM] et [CN]. Montrer que r(F) = K.

c) En déduire la nature du triangle AFK.

5)a)Montrer que $AF^2 = 4 - 2\sqrt{3}\cos(\theta + \frac{\pi}{6})$.

b) En déduire l'affixe du point M pour laquelle AF est maximale et construire le triangle AFK correspondant.

Exercice 26:(4 points)

On considère le polynôme P à variable complexe z défini par :

$P(z) = z^3 - (1+2i)z^2 + 3(1+i)z - 10(1+i)$.

1) Montrer que si z_1, z_2 et z_3 sont les racines du polynôme P alors $\sum_{k=1}^{3}\arg(z_k) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$.

2) Montrer que l'équation (E) : P(z) = 0 admet une solution imaginaire ib, où b est un réel à déterminer.

3) Déduire une factorisation du polynôme P(z).

4) Achever alors la résolution de l'équation (E).

5) Que peut-on dire du triangle dont les sommets ont pour affixes les trois solutions de (E). Justifier.

Exercice 27: (4 points)

Le plan étant rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$, soit l'application f du plan complexe dans lui-même qui au point M (z) associe le point M' (z') tel que : $z' = \frac{z+i\bar{z}}{2}$.

1) Montrer que l'ensemble D des points M (z) invariants par f est une droite.
2) a) Montrer que $\frac{z'-z}{1-i}$ est réel.

b) En déduire que la droite (MM') à une direction fixe.

3) Soit M un point du plan.

a) Montrer que: $f \circ f(M) = f(M)$.

b) Déduire des questions précédentes une construction du point M'.

4) Caractériser géométriquement l'application f.

Exercice 28 : (6 points)
Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

1°) Résoudre dans C l'équation :
$(E) : z^2 - iz\left(1 - \cos(\theta).e^{i\theta}\right) + \cos(\theta).e^{i\theta} = 0$, $\theta \in IR$

2°) On considère les points A, B et M d'affixes respectives i, $\frac{i}{4}$ et $\frac{1}{i + \tan\theta}$, $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

On note N le milieu du segment [AM].

a)Montrer que $z_N = \frac{1}{4}\left(\sin(2\theta) + 2i\sin^2\theta\right)$.

b)Prouver que, lorsque θ varie dans $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, le point N varie sur le cercle Γ de centre B et de rayon $R = \frac{1}{4}$ privé d'un point à déterminer.

c)En déduire l'ensemble des points M, lorsque θ varie dans $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

d)Ecrire z_M sous forme exponentielle.

Exercice 29 (points)
Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct (o,) u, v
On considère les points A , B et C d'affixes respectives i , – i et $\sqrt{3}$. Soit f l'application du plan P privé du point B dans P qui à tout point M d'affixe z, (z ≠ -i) associe le point M' d'affixe $z' = \frac{iz+1}{z+i}$

1) Déterminer le module et un argument de z' dans chacun des cas :
a) z = $\tan(\theta)$, $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$; b) z = $e^{i\theta}$, $\theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

2)a) Montrer que ABC est un triangle équilatéral direct.
b) Construire le point C puis tracer le cercle C circonscrit au triangle ABC. (unité 2 cm)
3) a) Justifier que A est l'unique point qui n'a pas d'antécédent par f.
b) Montrer que pour tout nombre complexe z non nul et distinct de i et de –i on a : $\frac{z'+i}{z'-i} = iz$
c) L'axe des réels recoupe C en N. Construire l'antécédent S de N par f.
4) Résoudre dans chacune des équations suivantes :
a) (E) :$\frac{iz+1}{z+i} = ie^{i\theta}z + i - e^{i\theta}, \theta \in]-\pi, \pi]$.
b) (E2) :$\frac{1+iz}{i+z}$=1+z²

Exercice 30:(**6 points)**
Le plan P est rapporté à un repère orthonormé direct (O, $\vec{u}$, $\vec{v}$).
On considère dans l'ensemble des nombres complexes les équations suivantes :
(E): $2z^2 - (1 + i)z + 1 + i = 0$
et (F): $2z^3 - 3(1+i)z^2 + (1+3i)z - 2i = 0$.

1) Soit $\alpha \in]\frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$; résoudre dans C l'équation:

$$2e^{i\alpha}z^2 - (1 + ie^{i\alpha})z + i + e^{i\alpha} = 0.$$

2) On considère les points M, M' et N d'affixes respectives :
z = $\frac{1}{2}(e^{-i\alpha} - i)$, $\bar{z}$ et $\cos(\alpha)$ où $\alpha \in]\frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$.
a) Ecrire z sous forme exponentielle.
b) Déterminer l'ensemble des points M quand α varie.
c) Montrer que OMNM' est un losange.
d) Déterminer α pour que OMNM' soit un carré.
3) a) Montrer que l'équation (F) admet une solution z_0 dont le point image est situé sur la première bissectrice $\Delta: y = x$.
b) Factoriser $P(z) = 2z^3 - 3(1+i)z^2 + (1+3i)z - 2i$
c) En utilisant 1) achever la résolution de l'équation (F).

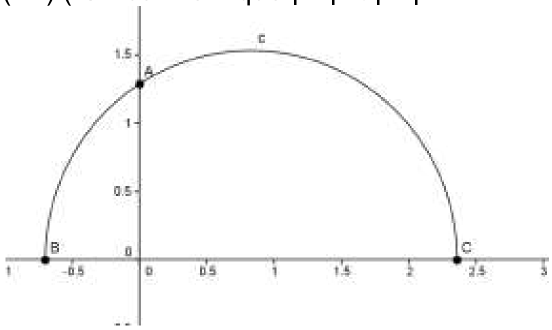
Exercice 31 : (6 points)
On donne l'équation (E_α):
$z^2 - (1 + i)e^{i\alpha}z + ie^{i\alpha} = 0$ avec $\alpha \in [0; 2\pi[$.

1) a) Vérifier que $e^{i\alpha}$ est une solution de l'équation (E_α).
b) Trouver alors l'autre solution de l'équation (E_α).
2) Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(o, \vec{u}, \vec{v})$ on considère les points M_1 et M_2 d'axes respectives z_1 et z_2, avec $z_1 = e^{i\alpha}$ et $z_2 = ie^{i\alpha}$_.
a) Montrer que le triangle OM_1M_2 est rectangle et isocèle.
b) On pose $Z = z_1 + z_2$. Ecrire Z sous forme exponentielle.
c) Soit $I = M_1 * M_2$. Montrer que lorsque α varie dans $[0; 2\pi[$ le point I décrit un cercle (C) de centre O et de rayon $\frac{\sqrt{2}}{2}$
d) Montrer que la droite (M_1M_2) est tangente à (C).
3) On suppose que $\alpha \in [0; \pi[$.
a) Montrer que $(u, M1M2) = \alpha + \frac{3}{4}\pi\ [2\pi]$
b) En déduire la valeur de α pour laquelle la droite (M_1M_2) est parallèle à l'axe (O, u, v)
c) Soit A le point d'axe $z_A = 1 + i$. Placer les points A, M_1 et M_2, pour la valeur trouvée de α.
d) Calculer alors l'aire du triangle AM_1M_2.
4) Soient z un nombre complexe et le système
(S) : $\begin{cases} |z| = |z * 2i| \\ \arg(z^2) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{cases}$; $k\epsilon Z$
a) z_A est-il solution du système (S) ?
b) Déterminer et construire l'ensemble D={M(z) tel que $\arg(z^2) = \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$
c) Résoudre le système (S).

Exercice 32TN 2016

On considère dans C l'équation :
(E) $z^2-(1+2i)mz-(1-i)m^2=0$, où m est un nombre complexe non nul d'argument $\theta \epsilon\ ]0, \pi\ [$.
1)a) Résoudre dans C l'équation (E). On note z_1 et z_2 les solutions de (E).
b)Montrer que (z_1z_2 est un réel strictement positif) ssi $\theta = \frac{5}{6}\pi$.
2)Vérifier que $z_1z_2 = |m|^2\sqrt{2}$.
3) Soit t un réel strictement positif et $m = \frac{\sqrt{t}}{\sqrt[4]{2}} e^{\frac{5\pi}{6}i}$. On se propose de construire les points M1 et M2 images des solutions z_1 et z_2 de (E). Correspondant au nombre complexe m.

Dans la figure ci-dessous $(o, \vec{u}, \vec{v})$ est un repère orthonormé direct. B et C sont les points d'affixes respectives $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ et t.
E est le point d'intersection du demi cercle C de diamètre [BC] avec l'axe (O, v)
a)Montrer que $OE^2 = OB.OC$
b) En déduire que $|m| = OE$
4) a)Construire le point A d'affixe m.
b)En déduire une construction des points M_1 et M_2 images des solutions z_1 et z_2 de l'équation (E) (On convient que $|z1| < |z2|$



Exercice 33 TN 2016 Sc :

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(o, \vec{u}, \vec{v})$ .On considère les points A et B d'affixes respectives $a = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$ et $b = 2e^{i\frac{\pi}{4}}$.
1) a)Construire les points A et B
b)Ecrire a et b sous forme algébrique.
2) La droite parallèle à l'axe des ordonnées passant par A et la droite parallèle à l'axe des abscisses passant par B se coupent en un point C.
a) Déterminer l'affixe c du point C.
b) Vérifier que $c^2 = 1 + 2i\sqrt{6}$.
3) On considère le point D d'affixe c^2.
a) Montrer que OD = 5.
b) En déduire une construction du point D.
4) Résoudre dans C, l'équation ; $2z^2-2z-i\sqrt{6}. = 0$.
On désigne par z_1 la solution dont la partie réelle et la partie imaginaire sont positives et par z_2 l'autre solution.
5) Soient les points I, M_1 et M_2 d'affixes respectives 1, z_1 et z_2.
a) Justifier que le point M_1 est le milieu du segment [IC].
b) Montrer que le quadrilatère OCM_1M_2 est un parallélogramme.
c) Construire les points M_1 et M_2.