Exercice n°1:

On considère trois points A, B et C distincts deux à deux d'affixes respectives a, b et c vérifiant la relation $a+bj+cj^2=0$ où $j=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

1- Vérifier que $1+j+j^2=0$.

2- Montrer que $a-c=j(c-b)$ et en déduire que le triangle ABC est équilatéral.

Exercice n°2:

Le plan complexe P rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$.

On considère le point M d'affixe $z=i-ie^{i\theta}$, avec $\theta\in]0,\pi[$.

1- Déterminer l'ensemble des points M lorsque θ décrit $]0,\pi[$.

2- Soient N et P les points d'affixes respectives $z_1=\overline{z}$ et $z_2=\frac{z^2}{\overline{z}}$.

a- Ecrire z_1 et z_2 sous forme exponentielle.

b- Vérifier que M et N sont distincts et montrer que MN = MP

3-a- Exprimer $(\widehat{\overrightarrow{MN},\overrightarrow{MP}})$ en fonction de θ et déterminer alors θ pour que le triangle MNP soit équilatéral.

b- Donner alors une construction du point ~~M'~~ P image d'un point M du cercle ζ privé de O et A'.

Exercice n°3 :

1- Soit $\theta\in[-\pi,\pi]$ et z le nombre complexe définie par : $z=\frac{1}{2}[\sin\theta+i(1-\cos\theta)]$.

Déterminer le module et un argument de z.

2- Soit $]0,\pi[$, déterminer le module et un argument des nombres complexes suivants :

$z-i$ et $\frac{z}{z-i}$ avec z est le nombre complexe donné au 1).

3- Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j})$.

On désigne par M et N d'affixes respectives $z-i$ et $\frac{z}{z-i}$.

Déterminer et construire l'ensemble des points M et N lorsque θ varie dans $]0,\pi[$.

Exercice n°4 :

Le plan complexe est rapporté à un r.o.n.d $(O,\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$.

On désigne par A et B les points d'affixes respectives a et 1 avec a un nombre complexe différent de 1.

A tout point $M(z)$ distinct de B on associe le point $M'(z')$ tel que : $z'=\frac{z-a}{z-1}$.

1- Montrer que z est solution de l'équation: $z'=z \Leftrightarrow$ z est solution de (E) : $z^2-2z+a=0$.

2-a- On suppose que $a=1+e^{2i\theta}$ avec $\theta\in\left]\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right[$, résoudre l'équation (E).

b- Mettre les solutions sous forme exponentielle.

3- Dans la suite de l'exercice on prend $a=-1$.

a- Montrer que : $(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{BM}})+(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{BM'}})\equiv 0\,[2\pi]$.

b- Montrer que z' est imaginaire pur si et seulement si $|z|=1$.

c- En déduire une construction du point M' sachant que M est un point du cercle trigonométrique privé de B.

Exercice n°1 :

Le plan complexe P rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O,\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}\right)$.

Soit A d'affixe i, a tout point M(z) on associe le point M'(z') tel que : $z'=\dfrac{i\overline{z}+1}{\overline{z}+i}$.

1- Montrer que si M décrit l'axe des abscisses alors M' décrit le cercle trigonométrique de centre O.

2- On pose $z=1+i+e^{i\theta}$ avec $\theta\in\left]-\pi,\pi\right[$ et on désigne par B le point d'affixe 1+i.

a- Sur quel ensemble varie le point M lorsque θ varie?.

b- Montrer que $z'-i=1+i\tan\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$.

c- En déduire que $\overrightarrow{BM'}=\tan\left(\dfrac{\theta}{2}\right)\vec{v}$, sur quel ensemble varie le point M'.

Exercice n°2 :

Soit $Z=\dfrac{\overline{z}}{1+iz}$ où $z=e^{i\theta}$ avec $\theta\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$. On désigne par M(z) et N(Z).

1- Donner la forme exponentielle de $\overline{z}$ et de $1+iz$ et en déduire la forme exponentielle de Z.

2- Pour quelle valeur de θ les points O, M et N sont alignés.

Exercice n°3:

1- Déterminer l'ensemble Δ des points M d'affixe z tels que $6-z-\overline{z}=0$.

2- Soit l'ensemble $E=\left\{M(z)\in P\setminus\Delta \text{ tel que } z'=\dfrac{9-z\overline{z}}{6-z-\overline{z}}\right\}$.

a- Montrer que z' est réel. Que peut-on conclure pour le point M' ?

b- Montrer que pour tout $z\in\mathbb{C}$ tel que Réel(z) $\neq 3$, on a $|z'-z|=|z'-3|$.

c- Soit A un point d'affixe 3.

d- En déduire une construction du point M' connaissant un point M de $P\setminus\Delta$.

Exercice n°4:

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

A tout point M(z) distinct de O on associe le point M'(z') tel que : $z'=\overline{z}+\dfrac{z^2}{\overline{z}}$.

1- Montrer que les points O, M et M' sont alignés.

2- Déterminer les ensembles E des points M(z) tel que : $z'=0$ et F des points M(z) tel que : $z'=z$.

3- Soit M(z) distinct de O tel que $M\notin E$ et $M\notin F$, on désigne par I le milieu du segment $[OM']$ et N le symétrique du point M par rapport à l'axe des abscisses.

Montrer que $\overrightarrow{IN}\perp\overrightarrow{OM}$ et donner une construction géométrique du point M' à partir du point M.

Exercice n°5:

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $\left(O,\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}\right)$.

A tout point M (z) associe le point M' (z') tel que $z'=\dfrac{z+iz\overline{z}}{1+z\overline{z}}$

1- On désigne par A le point d'affixe i, et déterminer l'ensemble des points M(z) tel que : $z'=z$.

2- Montrer que A, M et M' sont alignés.

3-a- Soit A' (-i). Montrer que pour tout $z\in C\setminus\{0,-i\}$, $\arg(z')\equiv\dfrac{\pi}{2}+\left(\overrightarrow{MA'},\overrightarrow{MO}\right)[2\pi]$

b- En déduire que si M au cercle ζ de diamètre [OA'] privé de O et A' alors M' appartient à une droite fixe que l'on précisera.

c- Donner alors une construction du point M' image d'un point M du cercle ζ privé de O et A'.