Série nombres complexes N°1

Exercice 1 :

1) Soit a un complexe. Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ tels que : $(z-a)(\bar{z}-\bar{a}) = 4a\bar{a}$.
2) Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ tels que : $z+\bar{z} = |z|$.
3) Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ tels que : $z+\dfrac{4}{z}$ soit un réel.
4) Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ tels que : $\dfrac{z-2}{z+1}$ soit réel.
5) Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ tels que : $\dfrac{z-i}{z+1}$ soit imaginaire pur.
6) Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ tels que : $\left|\dfrac{z+i}{2z-4i}\right| = 1$.

Exercice 2 :

Le plan complexe étant muni d'un R.O.N.D $(O,\vec{u},\vec{v})$. Soit z un complexe non nul. On considère les points A$(a=z)$; B$(b=\bar{z})$ et C$(c=\dfrac{z^2}{\bar{z}})$.

1) On pose r et θ le module et un argument de z. Exprimer en fonction de r et θ le module et un argument de b et c.
2) Comment faut-il choisir z pour que les points A, B et C soient distincts 2 à 2.
3) Montrer que pour chaque valeur de z les points A, B et C appartiennent à un cercle de centre O.
4) Montrer que AB = AC.
5) Déterminer les complexes z pour que ABC soit un triangle équilatéral.

Exercice 3 :

Le plan complexe est muni d'un R.O.N.D $(O\,;\vec{u}\;;\vec{v})$.

Pour tout complexe $z \neq 1$, on pose $Z = \dfrac{z+1}{z-1}$. Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ dans chacun des cas suivants :

1) Z soit réel.
2) Z soit imaginaire pur.
3) $|Z| = 1$.
4) Les points $M(z)$, $M'(Z)$ et O soient alignés.
5) $\arg(Z) \equiv \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$.
6) Z réel strictement négatif.
7) $\arg(Z) = \dfrac{\pi}{4} + k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.

Exercice 4 :

On considère $a = \sqrt{2+\sqrt{2}} - i\sqrt{2-\sqrt{2}}$.

1) Ecrire a^2 sous forme trigonométrique (ou exponentielle).
2) En déduire la forme trigonométrique (ou exponentielle) de a.
3) Donner alors les valeurs exactes de $\cos(\dfrac{\pi}{8})$ et $\sin(\dfrac{\pi}{8})$.
4) Soit $(O,\vec{u},\vec{v})$ un R.O.N.D du plan.
   a) Construire les points $A(a)$ et $B(ia^2)$.
   b) Déterminer l'ensemble $\mathscr{C}$ des points $M(z)$ tels que $\arg(\dfrac{iz+a^2}{z-a}) = -\dfrac{\pi}{8} + k\pi$ où $k\in\mathbb{Z}$.

   Vérifier que $O\in\mathscr{C}$. Tracer $\mathscr{C}$.

Exercice 5 :

Dans le plan complexes rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$, on considère les points : $A(-1)$, $B(1)$, $M(z\neq 0)$ et $N\left(\frac{1}{z}\right)$.

1) Montrer que $AN = \dfrac{AM}{OM}$.
2) Dans la suite on suppose que M appartient au cercle $\mathscr{C}$ de centre B et de rayon $\sqrt{2}$.
   a) Montrer que $|z+1|^2 = 2|z|^2$.
   b) En déduire que N appartient à un cercle fixe que l'on caractérisera.
   c) Construire N connaissant M sur $\mathscr{C}$.

Exercice 6 :

1) Soient θ et φ deux réels tels que : $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ et $\dfrac{\pi}{2} < \varphi < \pi$.
   a) Déterminer le module et un argument de $z = 1 - e^{2i\theta}$ et $z' = 1 + e^{2i\varphi}$.
   b) En déduire le module et un argument de $z'' = \dfrac{z}{z'}$.
2) Soit $\alpha\in[0;2\pi[$ et u le nombre complexe de module 1 et d'argument α.
   On pose $v = 1+u+u^2$. Donner le module et un argument de v.
3) On donne les points $A(1-i)$ et $B(3+2i)$. Déterminer les affixes des points C et D tels que $ABCD$ soit un carrée dont une mesure de $(\overrightarrow{AB}\ ;\overrightarrow{AD})$ est $\dfrac{\pi}{2}$.

Exercice 7 :

Le plan complexe est rapporté à un R.O.N.D $(O,\vec{u},\vec{v})$. Soit $A(1)$ et $B(-i)$

1) Déterminer l'ensemble E des solutions de l'équation : $|z-1|^2+\bar{z}-1=0$.
2) Pour $z\in\mathbb{C}\setminus\{E\}$, on pose $f(z) = \dfrac{iz^2}{|z-1|^2+\bar{z}-1}$. Montrer que $f(z) = \dfrac{iz}{\bar{z}-1}$.
3) Déterminer et construire l'ensemble T des points $M(z)$ tels que $|f(z)| = 2$.
4) On note M' le point d'affixe $f(z)$.
   a) Montrer que : M est un point de la médiatrice de $[OA]$ ssi $M' = B$.
   b) Montrer que $(\widehat{\overrightarrow{OM}\ ,\ \overrightarrow{OM'}}) \equiv -\dfrac{\pi}{2} + (\widehat{\overrightarrow{AO}\ ,\ \overrightarrow{AM}})\quad [2\pi]$.
   c) En déduire l'ensemble $\mathscr{D}$ des points $M(z)$ tels que O, M et M' soient alignés.
5) On pose $z = e^{i\theta}$ avec $\theta\in]0\ ;2\pi[$.
   a) Exprimer $f(z)$ sous forme exponentielle.
   b) En déduire l'ensemble des points $M(z)$ tels que $M'\in\Delta : y = x$.

Exercice 8 :

$(O,\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})$ est un repère orthonormé direct du plan $\mathscr{P}$. Soit f l'application de $\mathscr{P}\setminus\{B\}$ dans $\mathscr{P}$ qui à tout point $M(z)$ associe le point $M'(z')$ telle que $z' = \dfrac{iz}{\bar{z}+i}$. On note Δ la droite d'équation : $y = \dfrac{1}{2}$.

1) Montrer que Δ est l'ensemble des antécédents de B.
2) Déterminer l'ensemble E des points M tels que M' soit le milieu de $[BM]$.
3) Montrer que pour tout $z\neq i$, $z'-i = \left(\dfrac{1-2Im(z)}{|z-i|^2}\right)(z-i)$. Que peut-on déduire pour les points B, M et M'.

4) Soit $\mathscr{C}$ l'ensemble des points M tels que $BM = MH$; où H est le projeté orthogonal de M sur Δ.

   a) Montrer que $\mathscr{C}$ est une parabole. Tracer $\mathscr{C}$.

   b) Montrer que pour tout $M \neq B$, $BM' \times BM = 2HM$. En déduire que lorsque M varie sur $\mathscr{C}$, le point M' appartient à un cercle fixe que l'on caractérisera.

   c) Donner une construction géométrique du point M' quand M appartient à $\mathscr{C}$.

Exercice 9 :

Dans le plan complexes rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$, on considère les points M_1 et M_2 d'affixes respectives $z_1 = -\cos\theta e^{i\theta}$ et $z_2 = i\sin\theta e^{i\theta}$ où $\theta \in \left]0\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$.

1) Montrer que M_1 et M_2 sont symétriques par rapport à un point fixe I que l'on précisera.
2) Ecrire z_1 et z_2 sous forme exponentielle.
3) Montrer que $OM_1^2 + OM_2^2 = M_1M_2^2$. Conclure.
4) Déterminer $\left|z_1 + \frac{1}{2}\right|$. En déduire l'ensemble des points M_1 et celui des points M_2.
5) Soit $A(-1)$. Montrer que OM_1AM_2 est un rectangle puis déterminer θ pour qu'il soit un carré.

Exercice 10 :

Soit $r \geqslant 1$ et $\theta \in \left]0\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$. On pose $z_1 = re^{i\theta}$ et z_2 un complexe vérifiant : $z_1z_2 = 1$ et $|z_1 - z_2| = 2$. Dans le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$ on considère les points $A(-1)$, $B(1)$, $M_1(z_1)$ et $M_2(z_2)$.

1) Montrer que $|z_1 - z_2|^2 = r^2 + \frac{1}{r^2} - 2\cos 2\theta$. En déduire que $r - \frac{1}{r} = 2\cos\theta$.
2) Calculer AM_2 et BM_1.
3) Montrer que (AM_1) et (BM_2) sont parallèles.
4) Construire le point M_2 connaissant M_1.

Exercice 11 :

Soit $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$ et $(E_\theta) : z^2 - 4z + 4 + 9e^{2i\theta} = 0$.

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E_θ).
2) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$, on donne les points $A(-1)$, $B(5)$, $M'(z' = 2 + 3ie^{i\theta})$ et $M''(z'' = 2 - 3ie^{i\theta})$.
   a) Déterminer et construire les ensembles des points M' et M'' lorsque θ varie.
   b) Ecrire aff$(\overrightarrow{AM'})$ et aff$(\overrightarrow{AM''})$ sous forme exponentielle.
   c) Montrer que $AM'BM''$ est un rectangle.
   d) Déterminer θ pour que l'aire de $AM'BM''$ soit maximale. Vérifier dans ce cas que $AM'BM''$ est un carré.

Exercice 12 :

Le plan complexe $\mathscr{P}$ est rapporté à un R.O.N.D $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On note A le point d'affixe 1 et par $\mathscr{C}$ le cercle trigonométrique. On considère l'application f de $\mathscr{P}$ dans $\mathscr{P}$, qui à tout point $M(z)$ associe le point M''(z') telle que $z' = 2z - z^2$.

1) Déterminer les points invariants par f.
2) Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ tels que : $\mathrm{Arg}(z') - 2\mathrm{Arg}(z) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

3) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $2z-z^2 = 1+e^{2i\theta}$ où $\theta\in[-\frac{\pi}{2}\ ;\ \frac{\pi}{2}[$. Vérifier que les points images des solutions sont symétriques par rapport à un point fixe.

4) Dans cette question $M\in\mathscr{C}\setminus\{A\}$.

a) Montrer que $AM = MM'$.

b) Montrer que $\dfrac{z'-1}{z}$ est réel.

c) En déduire que A et M' sont symétriques par rapport à la tangente Δ au cercle $\mathscr{C}$ au point M.

Exercice 13 :

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$, on considère les points $A(i)$ et $B\left(\frac{1+i}{2}\right)$ et l'application f de $\mathscr{P}$ dans $\mathscr{P}$, qui à tout point $M(z)$ associe le point $M'(z' = (1-i)z-1)$.

1) Déterminer l'ensemble E des points $M(z)$ tels que $|z'| = 2\sqrt{2}$.

2) Ecrire z' sous forme exponentielle lorsque $z = \dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{i\theta}$ où $\theta\in[0\ ;\pi]$.

3) a) Montrer que si $M\neq B$ alors $(\widehat{\vec{u}\ ,\ \overrightarrow{OM'}}) \equiv -\pi/4+(\widehat{\vec{u}\ ,\ \overrightarrow{BM}})\ \ [2\pi]$.

b) En déduire l'ensemble F des points $M(z)$ tels que z' soit réel négatif ou nul.

4) Montrer que si $M\neq A$, le triangle AMM' est rectangle en M. Construire M' connaissant M.

5) Soit $P(z) = z^3-(i+2e^{i\theta})z^2+(1+e^{2i\theta}+2ie^{i\theta})z-i(1+e^{2i\theta})$ où $\theta\in\left]\frac{\pi}{2}\ ;\ \frac{3\pi}{2}\right[$.

a) Calculer $P(i)$ puis résoudre l'équation $P(z) = 0$ et écrire les solutions sous forme exponentielle.

b) Soit $M_1(i+e^{i\theta})$ et $M_2(e^{i\theta}-i)$. Montrer que $\overrightarrow{OM_1}\perp\overrightarrow{OM_2}$ et déterminer et construire l'ensemble des points M_1 et celui des points M_2.

Exercice 14 :

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E_m) : $z^3+mz^2-\overline{m}\,z-1 = 0$ où m est un paramètre complexe.

1) Résoudre l'équation (E_0) pour $m = 0$.

2) Dans cette question $m\in\mathbb{C}^*$.

a) Montrer que si z_0, z_1 et z_2 sont les solutions de (E_m) alors $z_0z_1z_2 = 1$

b) Montrer que si z est solution de (E_m) alors $\dfrac{1}{\overline{z}}$ est aussi solution.

c) En déduire que (E_m) admet au moins une solution de module 1.

3) Dans cette question on suppose que : $|m| = 1$ et $\text{Arg}(m)\equiv\alpha\ \ [2\pi]$ avec $\alpha\in\mathbb{R}$.

a) Vérifier que $(-m)$ est solution de (E_m).

b) Déterminer les solutions de (E_m) sous forme exponentielle.

4) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $2z^3+(1+i\sqrt{3})z^2-(1-i\sqrt{3})z-2 = 0$.