Mme Triki Ikhlas Année Scolaire 2020/2021	Série d'exercice N°1	4Maths

Exercice N°1

Le plan P est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{U},\vec{V})$, on donne les points A et I d'affixes respectives $1,\frac{1}{2}$. Soit ξ le cercle de centre I et de rayon $\frac{1}{2}$.

1) Montrer que : $M(z)\in\xi \Leftrightarrow 2|z|^2-(z+\bar{z})=0$

On notre $\mathbb{C}'=\left\{z\in\mathbb{C} \text{ tel que } 2|z|^2-(z+\bar{z})\neq 0\right\}$

2) Soit l'application f l'application de $P\setminus\{\xi\}$ dans P qui à tout point $M(z)$ associe le point $M'(z')$ tels que : $z'=\dfrac{z(|z|^2-1)}{2|z|^2-(z+\bar{z})}$

a) ~~Montrer que pour tout~~ $\cancel{z\in\mathbb{C}'}$ ~~, on a~~ $\cancel{\dfrac{z'}{z}}$ ~~est réel~~

b) Montrer que pour tout $z\in\mathbb{C}'$, on a $z-z'=\dfrac{z|z-1|^2}{2|z|^2-(z+\bar{z})}$. En déduire que $|z'-z|=|z'-1|$

c)Construire M' connaissant M dans $P\setminus\{\xi\}$

3) soit M un point du cercle ξ' de centre O et de rayon r avec $r\succ 1$

a) Montrer que M' est un point du segment $[OM]$.

b) En déduire que $OM'+AM'=r$

Exercice N°2

Le plan complexe P est rapporté orthonormé $(O,\vec{U},\vec{V})$. Soit f l'application qui à tout point $M(z)$ associe le point $M'(z')$ tel que $z'=\dfrac{z+iz\bar{z}}{1+z\bar{z}}$. On pose $A(i)$ et $B(-i)$

1) Montrer que Déterminer l'ensemble D des points M tel que $z'=z$

2) Montrer que pour tout nombre complexe z les points A, M et M' sont alignés

3) Soit ζ le cercle de diamétre $[OB]$.

a) Montrer que pour tout ^point $M\in\zeta\setminus\{O,B\}$, On a : $\arg(z')\equiv\frac{\pi}{2}+\left(\widehat{\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MO}}\right)[2\pi]$

b) En déduire que si $M \in \zeta \setminus \{O, B\}$ alors M' appartient à une droite Δ que l'on précisera.

c) Donner une construction du point M' image d'un point M de ζ

4) Montrer que si $M \in \zeta_{(O,1)}$, alors M' milieu de $[AM]$

Exercice N°3

Le plan complexe P est rapporté orthonormé $(O, \vec{U}, \vec{V})$. On considére les points A et B d'affixes respectives 1 et (-1) et on désigne par P' le plan privé de A .

Soit l'application f l'application de P' dans P qui à tout point $M(z)$ de P' associe le point $M'(z')$ tels que : $z' = \frac{z(\bar{z}-1)}{z-1}$

1) a) Montrer que $|z'| = |z|$, interpréter le resultat

b) Soit ξ le cercle de centre O et de rayon 1 .Montrer que pour tout point M de $\xi \setminus \{A\}$ on a $f(M) = B$

2) Déterminer l'ensemble des points M tel que $z' = z$

3) Soit M un point quelconque du plan privé de la droite (AB) et du cercle ξ .

On désigne par M_1 l'image de M par la symetrie orthogonale d'axe (AB) et par M' l'image de M par f

a) Montrer que $\frac{Aff(\overrightarrow{M_1M'})}{Aff(\overrightarrow{AM_1})} = \frac{\bar{z}-z}{|z-1|^2}$. En déduire que les vecteurs $\overrightarrow{M_1M'}$ et $\overrightarrow{AM_1}$ sont orthogonaux.

b) Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{M_1M'}$ et $\overrightarrow{BM'}$ sont orthogonaux.

c) En déduire une construction géometrique du point M'