Serie d'exercices n° C_0

Exercice n°1 :

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$. A tout point $M(z)$ distinct de O on associe le point $M'(z')$ tq $z' = \bar{z} + \frac{z^2}{\bar{z}}$

1°) Montrer que les points O, M et M' sont alignés

2°) Déterminer : $E = \{M(z) \in P$ tel que $z' = 0\}$ et $F = \{M(z) \in P$ tel que $z' = z\}$

3°) Soit $M(z)$ tel que $M \neq O$ et $M \notin E$ et $M \notin F$. On désigne par I le milieu de $[OM']$ et N le symétrique du point M par rapport à l'axe des abscisses.

Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{IN}$ et $\overrightarrow{OM}$ sont orthogonaux.

Donner une construction géométrique du point M' à partir du pt M

Exercice n°2

Dans le plan complexe P rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$

1) Soit les nombres complexes $z_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $z_2 = -\frac{\sqrt{5}}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

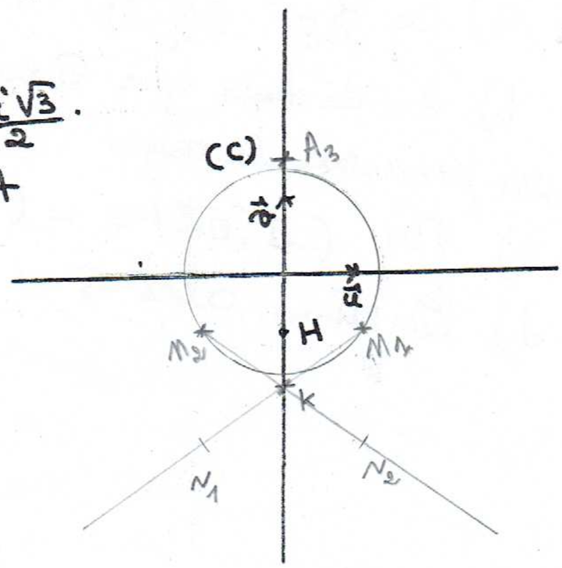
a) Calculer $z_1 + z_2$ et $z_1 \times z_2$

b) En déduire que pour tout nombre complexe z

$$(z - z_1)(z - z_2) = z^2 + i\sqrt{3}z - 2$$

Dans la suite on considère les points M_1 et M_2 d'affixes z_1 et z_2

2°) Dans la figure ci-contre, on a tracé le cercle (C) de centre O et de rayon $\sqrt{2}$ et on a placé le point H d'affixe $-\frac{i\sqrt{3}}{2}$.



a) Montrer que M_1 et M_2 appartiennent au cercle (C)

b) Justifier que H est le milieu du segment $[M_1M_2]$.

c) Construire les points M_1 et M_2.

3°) Soit K le point d'affixe $-i\sqrt{3}$.

Soit z un nombre complexe et M et N les points du plan complexe

a) Montrer que (K milieu de [MN]) si et seulement si $(z^3+z+2i\sqrt{3}=0)$

b) Vérifier que $z^3+z+2i\sqrt{3}=(z-i\sqrt{3})(z^2+i\sqrt{3}z-2)$

c) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'éq : $z^3+z+2i\sqrt{3}=0$.

d) Construire alors les points N_1 et N_2 d'affixes respectives z_1^3 et z_2^3

e) Déterminer l'affixe a d'un point A de l'axe $(O,\vec{v})$ dont le symétrique par rapport au point K est d'affixe a^3.

<u>Exercice n°3</u> Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$. Soit $A(i)$.

A tout point $M(z)$ distinct de A, on associe le point $M'(z')$ tel que $z'=\dfrac{z^2}{i-z}$.

1°) Déterminer les points M confondus avec leur image M'

2°) on pose $z=x+iy$. Déterminer $Re(z')$ à l'aide de x et y

En déduire l'ensemble $E=\{M(z)$ tel que $M'\in(O,\vec{v})\}$.

3°) Déterminer l'ensemble $F=\{M(z)$ tel que M et M' sont situés sur un même cercle de centre $O\}$.

4°) on suppose dans cette question que $M\in\mathscr{C}_{(A,\frac{1}{2})}$ et G le point du plan tel que $\vec{GA}+\vec{GM}+\vec{GM'}=\vec{0}$.

a) Mq $z_G=\dfrac{1}{3(z-i)}$

b) En déduire que G est situé sur un cercle de centre O dont on précisera le rayon

c) Mq $(\vec{u},\widehat{\vec{OG}})\equiv-(\vec{u},\widehat{\vec{AM}})\,[2\pi]$

d) Construire alors G et M' connaissant un pt M sur $\mathscr{C}_{(A,\frac{1}{2})}$