Exercice n°1

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$ on donne A, A', B et B' d'affixes respectives $1, -1, i$ et $-i$

A tout point $M(z)$ distinct de O, A, A', B et B' on associe les points M_1 et M_2 d'affixes respectives z_1 et z_2 tels que les triangles BM_1M et AMM_2 soient rectangles isocèles avec $(\overrightarrow{M_1B}, \overrightarrow{M_1M}) \equiv (\overrightarrow{M_2M}, \overrightarrow{M_2A})$ $[2\pi]$

et $(\overrightarrow{M_1B}, \overrightarrow{M_1M}) \equiv \frac{\pi}{2}$ $[2\pi]$.

1°) a) Justifier que $z_1 = \frac{1+i}{2}(z+1)$ et $z_2 = \frac{1-i}{2}(z+i)$

2°) a) Montrer que $OM_1 = OM_2 \Leftrightarrow |z+1| = |z+i|$. En déduire l'ensemble Δ des points M tels que $OM_1 = OM_2$ et tracer Δ

b) Mq $OM_1 = M_1M_2 \Leftrightarrow |z-1|^2 = 2$. En déduire l'ensemble des points M tq $OM_1 = M_1M_2$.

c) En déduire les deux points M pour lesquels OM_1M_2 est un triangle équilatéral et placer les sur la figure.

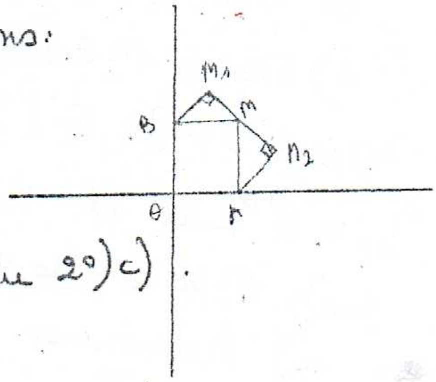
3°) a) Quelle relation peut-on écrire entre z_1 et z_2 si OM_1M_2 est équilatéral

b) Déduire que z est solution des équations.

$$e^{i\frac{\pi}{4}}(z+i) = e^{i\frac{7\pi}{12}}(z+1)$$

$$e^{-i\frac{\pi}{4}}(z+i) = e^{-i\frac{\pi}{12}}(z+1)$$

c) Déduisez-en les affixes des pts M du 2°)c).



Exercice n°2

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$

Soit I le point d'affixe 1 et $\mathscr{C}$ le cercle de diamètre $[OI]$

on désigne par A un point du plan d'affixe un nombre complexe a non réel

Soit M un point d'affixe z non nul et M' d'affixe az.

1°) a) Montrer que $(\overrightarrow{M'O}, \overrightarrow{M'M}) \equiv \arg\left(\frac{a-1}{a}\right)$ $[2\pi]$

b) En déduire que OMM' est un triangle rectangle en M' si et seulement si A appartient au cercle $\mathscr{C}$ privé des points I et O

2°) Dans cette question M est un point de l'axe des abscisses distinct de O

A est un point de $\mathcal{C}$ privé des points I et O

a) Mq M' appartient à la dte (OA)

b) En déduire que M' est le projeté orthogonal de M sur la dte (OA)

Exercice n°3

Dans le plan complexe $\mathcal{P}$ rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ on considère les points A, B, C et D d'affixes respectives :

$z_A = 2$, $z_B = -i$, $z_C = 1-2i$ et $z_D = -2+2i$

Soit $M \in \mathcal{P} \setminus \{B\}$ tq $M(z)$ on associe le point $M'(z')$ tq $z' = 2\left(\dfrac{z-1+2i}{z+i}\right)$

1°) a) Determiner $E = \{M(z)$ tq z' imaginaire$\}$

b) Determiner $F = \{M(z)$ tq z' soit réel négatif$\}$

2°) a) Mq pour tout $M(z)$ on a : $(\vec{u}, \widehat{\overrightarrow{BM}}) + (\vec{u}, \widehat{\overrightarrow{AM'}}) \equiv \frac{3\pi}{4} [2\pi]$

et $BM \cdot AM' = 2\sqrt{2}$

b) Mq si $M \in [BC] \setminus \{B\}$ alors $M' \in (O, \vec{u})$

3°) Soit $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$ on considère les points P et Q d'affixes respectives

$z_P = e^{i\theta} - 2i$ et $z_Q = \tan\theta - i$

Soit P' et Q' les images respectives de P et Q

a) Determiner E_1 l'ensemble des points P quand θ varie dans $]0, \frac{\pi}{2}[$

b) Determiner l'ensemble (E_2) des points Q quand θ varie dans $]0, \frac{\pi}{2}[$

c) Ecrire $z_{P'}$ sous forme exponentielle et déduire $P' \in [OD)$

d) Mq $Q' \in \Delta$: la dte parallèle à (OD) passant par A.