LYCEE PILOTE SFAX	Série d'exercices N°5	Mr MEGDICH
		4ème MATH

EXERCICE N°1

Soient M le point d'affixe z et M' le point d'affixe z' tel que $z'=\frac{2z-1}{z}$ et A($\frac{1}{2}$)

1) Déterminer l'ensemble des points M pour que z' soit un réel positif

2) Montrer que si M appartient au cercle de diamètre $[OA]$ alors M' appartient à une droite que l'on précisera

3) On donne z'= $2e^{i\theta}$ exprimer z en fonction de θ puis déduire la résolution de l'équation : $(2z-1)^3=4\sqrt{2}(-1+i)z^3$

EXERCICE N°2

$\frac{21}{10}$

On note A le point d'affixe ; soit dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $4z^4-10z^3+21z^2-10z+4=0$

Soit α un nombre complexe non nul et M,N,P et Q les points d'affixes respectives $\alpha, \frac{2}{5}\alpha^2, \frac{1}{\alpha}, et\ \frac{2}{5\alpha^2}$

1) Dans cette question on prend $\alpha=1+i\sqrt{3}$

a) Donner l'écriture exponentielle puis algébrique de chacun des nombres complexes $\frac{2}{5}\alpha^2 et\ \frac{2}{5\alpha^2}$

b) Montrer que $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{AO}$

2) Montrer que $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{AO}$ si et seulement si α est solution de (E)

3)a) Montrer que si z_0 est une solution de (E) alors $\overline{z_0}$ et $\frac{1}{z_0}$ sont des solutions de (E)

b)En déduire les affixes des points M tels que $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{AO}$

EXERCICE N°3(bac)

Soit dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^2-\left(\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z+1=0$

1) a) justifier que (E) possède deux solutions distinctes. (on ne demande pas de déterminer ces solutions)

b) Déterminer z_1+z_2 . En déduire que les solutions de (E) ne sont pas conjuguées

On désigne par z_1 la solution telle que $|z_1|\succ 1\ et\ z_2$ l'autre solution

On considère dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$ les points A,B ,I et J d'affixes respectives $z_1, z_2, 1\ et\ -1$

2)a)Soit C le milieu du segment $[AB]$ .Montrer que l'affixe du point C est $z_C=\frac{\sqrt{3}}{2}e^{i\frac{\pi}{6}}$

b) En utilisant $(z_2-z_1)^2=(z_2+z_1)^2-4z_2z_1$, montrer que $(z_2-z_1)^2=4(z_C{}^2-1)$

c) Montrer que $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CI}})+(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CJ}})\equiv 0[2\pi]$

En déduire que la droite (AB) porte la bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{ICJ}$

3) Soit (C)le cercle circonscrit au triangle IAJ . On note K le centre de (C) et z_K l'affixe de K

a)prouver que K est un point de l'axe $(O,\vec{V})$. On pose z_K =iy avec y est un réel non nul.

b) Soit M un point du plan d'affixe z. Justifier que $(M\in(C))$ équivaut à $(z\overline{z}+iy(z-\overline{z})=1)$

c)En remarquant que $z_1=\frac{1}{z_2}$, montrer que le point B appartient au cercle (C)

4)a)Construire le point C b) Construire la droite (AB) et la médiatrice du segment $[AB]$

c)Déduire une construction des points A et B ,images des solutions de l'équation (E)

EXERCICE N°4

On considère les nombres complexes $a=\sqrt{3}+i$; $b=1-i\sqrt{3}$

1) Mettre a et b sous la forme exponentielle

2)a) Placer les points A,B et C d'affixes respectives a ,$\bar{b}$,$c=a+\bar{b}$ b) Vérifier que $c=\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)e^{i\frac{\pi}{4}}$

3) on considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^2+2z-2c=0$ a)Vérifier que a est une solution de (E)

b) on désigne par d la deuxième solution de (E) ,

montrer que $d=\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)e^{-i\frac{11\pi}{12}}$. Construire le point D d'affixe d

EXERCICE N°5(bac)

Dans le plan complexe P on considère les points A et B d'affixes respectives a et 1 avec a est un nombre complexe différent de 1 . Soit f l'application de P privé de B dans P qui à tout M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que $z'=\dfrac{z-a}{z-1}$

1) Montrer que les affixes des points invariants par f sont les solutions de l'équation (E) : $z^2-2z+a=0$

2)a)On suppose que $a=1+e^{2i\theta}$ avec $\theta\in\left]\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right[$ Résoudre l'équation (E)

b) Mettre sous forme trigonométrique chacune des solutions de (E)

3)Dans cette question on suppose a=-1 soit M un point de P privé de B d'affixe z et M' d'affixe z' = f(z)

a) Montrer que $\left(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{BM}}\right)+\left(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{BM'}}\right)\equiv 0[2\pi]$ déduire que $[BA)$ est une bissectrice de l'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{BM},\overrightarrow{BM'}}\right)$

b) Montrer que z' est imaginaire pur si et seulement si $|z|=1$

c) En déduire la construction du point M' image d'un point M du cercle trigonométrique privé de B

EXERCICE N°6(bac)

Soit dans $\mathbb{C}$ l'équation (E):$z^2-(1+2i)m\,z-(1-i)m^2=0$ avec m un nombre complexe d'argument $\theta\in]0,\pi[$

1) a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).On note z_1 et z_2 les solutions de (E)

b) montrer que (z_1z_2 est un réel strictement positif) si et seulement si ($\theta=\frac{5\pi}{8}$)

Dans la suite de l'exercice on prend $\theta=\frac{5\pi}{8}$ 2) vérifier que $z_1z_2=|m|^2\sqrt{2}$

3) Soit t un réel strictement positif et $m=\frac{\sqrt{t}}{\sqrt[4]{2}}e^{i\frac{5\pi}{8}}$ .On se propose de construire les points M_1 et M_2 images des solutions z_1 et z_2 de l'équation (E), correspondant au nombre complexe m

B et C sont les points d'affixes respectives $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ et t

E est le point d'intersection du demi-cercle de diamètre $[BC]$ avec l'axe des ordonnés

a) Montrer que $OE^2=OB.OC$ Déduire que $|m|=OE$

4)a) Construire le point A d'affixe m

b) En déduire une construction des points M_1 et M_2