LYCEE PILOTE SFAX	Série d'exercices N°1	Mr MEGDICH
		4ème MATH

EXERCICE N°1

Dans le plan complexe on donne le point A d'affixe -2i ; soit M un point d'affixe z on lui associe le point M'd'affixe z' tel que $z' = -2\bar{z} + 2i$

1) On donne le point B d'affixe 3-2i ; Déterminer les affixes des points A' et B' associés respectivement à A et B
2) Montrer que si M appartient à la droite D :y= -2 alors le point M' appartient à D
3) Montrer que pour tout M d'affixe z ; $|z' + 2i| = 2|z + 2i|$. Interpréter géométriquement ce résultat
4) Pour tout point M distinct de A on appelle θ un argument de z+2i
a) Montrer que (z+2i)(z'+2i) est un réel négatif ;en déduire un argument de (z'+2i)
b) Que peut on dire des demi droites $[AM)$ et $[AM')$
5) En utilisant les résultats précédentes, proposer une construction géométrique du point M' à partir d'un point M

EXERCICE N°2

On désigne par A et B les points d'affixes respectifs 1et i et par © le cercle de centre O et de rayon 1

Soit l'application f qui à tout point M de P d'affixe non nul z associe le point M' d'affixe $z' = \frac{z-i}{\bar{z}}$

1) Montrer que f n'a aucun point invariant
2) Déterminer l'ensemble des antécédents par f du point A
3) a- Montrer que pour tout point M de $P \backslash \{O, B\}$, on a : $(\widehat{\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}}) \equiv (\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{BM}})[2\pi]$
b- En déduire l'ensemble des points M pour lesquels O,M et M' sont alignés
4) a-Montrer que pour tout point M de $P \backslash \{O\}$,les vecteurs $\overrightarrow{AM'}$ et $\overrightarrow{OM}$ son orthogonaux
b- En déduire une construction du point M' à partir d'un point M donné n'appartenant pas à (OB) ; effectuer la construction en prenant $z_M = 1 + i(1 + \sqrt{3})$
5) a- Montrer que si $z' = \frac{z-i}{\bar{z}}$ alors $z(1 - z'\bar{z}') = i(1 - z')$
b- En déduire que pour tout point de P n'appartenant pas au cercle © admet un antécédent par f
c- Déterminer l'image par f de la droite $D(B, \vec{u})$ (mat yet)

EXERCICE N°3 (BAC 2011)

On considère le point A d'affixe (-1) et les points M,N et P d'affixes respectives z,z^2 et z^3 avec z un nombre complexe non nul différent de (-1)et de 1

1)a) Montrer que : (Le triangle MNP est rectangle en P) si et seulement si ($\frac{1+z}{z}$ est imaginaire pur)

b) On pose z=x+i y avec x et y sont deux réels. Montrer que $\frac{1+z}{z} = \frac{x^2 + y^2 + x - iy}{x^2 + y^2}$

c)En déduire que l'ensemble des points M tels que le triangle MNP soit un triangle rectangle en P est le cercle (Γ) de diamètre $[OA]$, privé de A et O

2) on a placé un point M d'affixe z sur (Γ) et son projeté orthogonal H sur $(O, \vec{u})$

On se propose de construire les points N et P d'affixe z^2 et z^3 tels que le triangle MNP soit rectangle en P

a)Montrer que $(\widehat{\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}}) \equiv (\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{OM}})[2\pi]$ puis que $(\widehat{\overrightarrow{ON}, \overrightarrow{OP}}) \equiv (\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{OM}})[2\pi]$

b) Montrer que $OH = OM^2$; Donner un procédé de construction des points Net P puis les construire

EXERCICE n°4

Le plan complexe est rapporté à un repère O.N.D. $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$ à tout point M d'affixe $z \in \mathbb{C}^*$ on associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = \frac{-1}{\bar{z}}$

1/a- Montrer que OM .OM'=1 et que $\left(\widehat{\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OM'}}\right) \equiv \pi\left[2\pi\right]$

b-En déduire que si M est un point du cercle de centre O et de rayon 1 alors O=M*M'

2/a- Montrer que $|z'+1| = |z'| \Leftrightarrow |z-1| = 1$

b- Soit I(1) et J(-1) trouver l'ensemble des points M' lorsque M décrit le cercle ζ de centre I et de rayon 1 privé de O

c- Expliquer comment peut on construire M' à partir d'un point M de ζ

3/On pose $z = re^{i\theta}$ avec $\theta \in \left]0,\pi\right[$ et $r \succ 0$ déterminer θ et r tel que $OM' = \frac{1}{3}OM$ et IM=1

EXERCICE n°5

Le plan complexe est rapporté à un repère O.N.D. $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$.On considère A(i) et B($\frac{1+i}{2}$)

pour tout z de C on pose z'=(1-i)z-1

1/a- Déterminer E=$\left\{M(z)/|z'| = 2\sqrt{2}\right\}$

~~b-On suppose que z = $\frac{1}{\sqrt{2}}(\cos\theta + i\sin\theta)$ avec $\theta \in \left[0,\pi\right]$ déterminer la forme trigonométrique de z' suivant les valeurs de θ~~

2/a-On suppose que M ≠ B ; Montrer que arg(z')$\equiv -\frac{\pi}{4} + \left(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{BM}}\right)\left[2\pi\right]$

b- Déduire F=$\left\{M(z)/z' \in \mathbb{R}^*_-\right\}$ construire F

3/ On suppose que $M \neq A$; montrer que AMM' est un triangle rectangle en M et déterminer $\left(\widehat{\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AM'}}\right)$. Deduire une construction de M' à partir de M.

EXERCICE n°6

Le plan complexe est rapporté à un repère O.N.D$\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$;Soit f l'application du plan qui à tout point M(z) associe le point M'(z') tel que $z' = \frac{z + iz\bar{z}}{1 + z\bar{z}}$ on désigne par A(i) et A' (-i)

1/ Montrer que f admet deux points invariants

2/ Montrer que M , A et M' sont alignés

3/ a- Montrer que $\forall z \in \mathbb{C} - \{0,i\}; \arg(z') \equiv \frac{\pi}{2} + \left(\widehat{\overrightarrow{MA'},\overrightarrow{MO}}\right)\left[2\pi\right]$

b- Déduire que si $M \in$ au cercle de diamétre [OA'] alors M' $\in$ à une droite qu'on précisera

c- Donner alors une construction du point M' image d'un point M du cercle de diamètre [OA']