Exercice n° 1 :

Soit P le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ pour tout complexe z on considère dans P les points M d'affixe z N d'affixe z^2 et Q d'affixe z^3.

1°) Déterminer les nombres complexes z pour lesquels deux au moins de ces trois points, M, N et Q sont confondus.

2°) Dans ce qui suit on supposera M, N et Q deux à deux distincts
Exprimer les distances MN et MQ en fonction de z, déterminer et construire dans P l'ensemble E des points M tels que MN = MQ.

3°) Montrer que $(\vec{MN}, \vec{MQ}) \equiv \arg(z+1)\ [2\pi]$.
Déterminer et construire l'ensemble F des points M tels que le triangle MNQ soit rectangle en M.

4°) Dans cette question $z = -1 - i$ Calculer les affixes de N et Q et construire le triangle MNQ dans le plan P.
Que peut on constater ? Expliquer ce résultat à partir de 2°) et 3°).

Exercice n° 2

1°) Soit θ un réel de l'intervalle $[-\pi, \pi]$ et z le nombre complexe défini par :

$$z = \frac{\sin\theta + i(1-\cos\theta)}{2}$$

; Déterminer en fonction de θ le module et un argument de z.

2°) Soit $\theta \in]0, \pi[$, Déterminer le module et un argument de chacun des nombres complexes suivants ; $z - i$ et $\dfrac{z}{z-i}$ où z étant le nombre complexe donné au 1°)

3°) Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ on considère les points M et N d'affixes respectives $z - i$ et $\dfrac{z}{z-i}$. déterminer les ensembles décrits respectivement par les points M et N lorsque θ varie dans l'intervalle $]0, \pi[$. représenter ces ensembles.

Exercice n° 3 Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. on considère un triangle ABC et on désigne par a, b et c les affixes respectives des points A, B et C

1°) Montrer que :
O centre du cercle circonscrit au triangle ABC si et seulement si $a\bar{a} = b\bar{b} = c\bar{c}$
dans la suite O est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC

2°) a) soit $\omega = \bar{b}c - b\bar{c}$, Montrer que ω est imaginaire pur.

b) Vérifier que $(b+c)(\bar{b}-\bar{c}) = \omega$, en déduire que $\frac{b+c}{b-c} = \frac{\omega}{|b-c|^2}$.
et que $\frac{b+c}{b-c}$ est imaginaire pur.

3°) soit H le point d'affixe $(a+b+c)$.

a) Exprimer en fonction de a, b et c les affixes des vecteurs $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{CB}$

b) Prouver que si $b+c \neq 0$ alors $(\widehat{\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{AH}}) = \frac{\pi}{2} + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$
Que peut-on dire du triangle ABC dans le cas où $b+c=0$?

c) En admettant de plus que $(\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{BH}}) = \frac{\pi}{2} + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$
déterminer ce que représente le point H pour le triangle ABC

Exercice n°4

Dans le plan complexe P rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$
on désigne par A le point d'affixe 1
à tout M d'affixe z on associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = z^2 - 2z + 2$

1°) Déterminer z tel que $z' = z$.

2°) a) Montrer que pour tout $M (z \neq 1)$ on a : $|z'-1| = |z-1|^2$
et $\arg(z'-1) \equiv 2\arg(z-1)\ [2\pi]$.

b) En déduire que $(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{AM'}}) \equiv 2(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{AM}})\ [2\pi]$ et $AM^2 = AM'$

3°) a) Montrer que si M appartient au cercle $\mathscr{C}$ de centre A et de rayon 2
le point M' appartient à un ensemble que l'on déterminera.

b) Déterminer l'ensemble des points M' lorsque M appartient
à la droite $\Delta : y = x - 1$.

4°) a) Déterminer l'ensemble E_1 des points M(z) tels que A, M et M'
sont alignés.

b) Déterminer l'ensemble E_2 des points M(z) tel que AMM'
soit un triangle rectangle isocèle en A.

5°) soit $\theta \equiv (\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{AM}})\ [2\pi]$, Montrer que $\theta \neq \frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$
alors pour tout point M de P on a :
$M' \in \Delta_\theta\ (y = (\tan 2\theta)x - \tan(2\theta)) \cap \mathscr{C}_{(A, AM^2)}$

Construire M' pour $M(1+\sqrt{3}+i)$