*Exercice – 1 – :*

*Soit* Z un nombre complexe different de 1 et $\theta$ un réel différent de $(2k+1)\pi$, $k \in Z$

1)Montrer que : $\frac{1+Z}{1-Z} = e^{i\theta}$ si et seulement si $Z = i\tan(\frac{\theta}{2})$.

2)Re*soudre* dans C l'équation $(\frac{1+Z}{1-Z})^3 = i$.

*Exercice – 2 – :*

*Le plan complexe est rapporté à un repére orthonormé direct* $(o, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$.*On* considére les points A et B d'*affixes respectives* 2 et 3 ; à tous point M d'affixe Z $\neq 2$ on associe le point M' d'affixe $Z' = \frac{\overline{Z}-3}{\overline{Z}-2}$

1)*Vérifier* que $Z'-1 = \frac{1}{2-\overline{Z}}$. En déduire que $IM' \times AM = 1$ et $\left(\widehat{\overline{AM}, \overline{IM'}}\right) \equiv \pi[2\pi]$.

2)*Construire* le point M' lorsque M est un point du cercle $\zeta_1$ de centre A et de rayon 1 .

3)Dans cette question le point M est un point du cercle $\zeta_2$ de centre B et de rayon 1.

a)Montrer qu'il existe un réel $\alpha$ de $]-\pi, \pi[$ tel que $Z = 3 + e^{i\alpha}$ .

b)Ecrire Z'-1 sous forme exponentielle .

c)Montrer que M' appartient à la droite $\Delta : x = \frac{1}{2}$. construire alors le point M'.

*Exercice – 3 – :*

*On* considére dans $\mathbb{C}$ l'équation (E): $(\frac{Z+2i}{Z})^4 + 4 = 0$

1)*Déterminer* l'ensemble $\zeta$ des points M d'affixe Z tels que $|Z+2i| = \sqrt{2}|Z|$ .

2)*Montrer* que si Z est une solution de (E) alors son point image $M \in \zeta$.

3)Re*soudre* dans C l'équation (E) . On donnera les solutions sous forme algébrique.

*Exercice – 4 – :*

1)*Résoudre dans* $\mathbb{C}$ *l'équation* $(E): Z^5 = e^{i\frac{2\pi}{3}}$

2)*Dans la figure ci contre, on a représenter dans un repère orthonormé direct* $(O, \overline{u}, \overline{v})$ *le point A image d'une solu*

a)*Construire tous les points images des solutions de* $(E)$

b)*Construire, dans le meme repère* $(O, \overline{u}, \overline{v})$, *les points images de racines de l'équation* $Z^{15} = 1$

*Exercice – 5 – :*

*Le plan complexe est rapporté au repére orthonormé direct* $(O, \overline{u}, \overline{v})$.*On* considére les points E et F d'*affixes respectives* 1 et i .On désigne par $C_1$ et $C_2$ les cercles de centres respectifs E et F et de meme rayon 1 . Soit $\theta$ un réel de l'intervalle $[0, 2\pi[$ , M le point d'affixe $1 + e^{i\theta}$ et N le point d'affixe $i(1 + e^{i\theta})$.

1)a)*Calculer* aff($\overrightarrow{EM}$) et aff($\overrightarrow{FN}$) .

b)Montrer que lorsque $\theta$ varie dans $[0, 2\pi[$ ,M varie sur $C_1$ *et* N varie sur $C_2$ .

c)Montrer que les droites (EM) et (FN) sont perpendiculaires .

2)Soit P le point d'affixe $Z_P = (1-i)\sin\theta . e^{i\theta}$ .

a)Montrer que $\frac{\text{aff}(\overrightarrow{EP})}{\text{aff}(}$ = [illegible]

b)Montrer que P es [illegible]

*Exercice – 6 –:*

*On considére* dans $\mathbb{C}$ l'équation (E): $z^2-(1-i)(m+1)z-i(m^2+1)=0$ , ou m est un nombre complexe

1)Déterminer les valeurs de m pour les quelles i est une solution de (E) ,

puis déterminer l'autre solution.

2)a)Resoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).Soit $z_1$ *et* $z_2$ *les solutions*.

b)On pose $m=ie^{i\theta}$ , $\theta \in ]0,2\pi[$ .

Déterminer le module et un argument de $z_1$ *et* $z_2$ .

3)*Dans* le plan complexe muni d'un R.O.N.D$(O,\vec{u},\vec{v})$ on considére les points A, $M_1$ *et* $M_2$ *d'af*

respectives : 2i , m-i et 1-im .

Déterminer la valeur de m pour laquelle on a : $\begin{cases} AM_2 = \sqrt{2}AM_1 \\ \widehat{(\overrightarrow{AM_1},\overrightarrow{AM_2})} \equiv -\dfrac{\pi}{4}[2\pi] \end{cases}$

*Exercice – 7 –:*

*On considére* dans $\mathbb{C}$ l'équation (E): $2z^3-(1+5i)z^2-(5-i)z+2i=0$ ,

1)Resoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E'): $2z^2-(1+3i)z-2=0$

2)a)Montrer que l'équation (E) admet dans $\mathbb{C}$, une solution imaginaire que l'on précisera.

b)Resoudre alors l'équation (E).

2)*Le* plan complexe muni d'un R.O.N.D$(O,\vec{u},\vec{v})$ on considére les points A et B *d'affixes*

respectives : $z_A=1+i$ et $z_B=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$ .On désigne par C le cercle de centre O et de rayon 1.

Donner les formes exponentielles de $z_A$ *et* $z_B$.

3)Dans la suite ,M désigne un point de C d'affixe $e^{i\alpha}$ , $\alpha \in [0,2\pi]$ .

On considére l'application f , qui à tout point M de C associe f(M)=MA $\times$ *MB*.

a)Montrer que pour tout réel $\alpha$, $e^{2i\alpha}-1=2i\sin\alpha e^{i\alpha}$ .

b)Montrer que $f(M)=\left|e^{2i\alpha}-1-\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i\right)e^{i\alpha}\right|$ .

c)En déduire que $f(M)=\sqrt{\frac{1}{4}+\left(2\sin\alpha-\frac{3}{2}\right)^2}$ .

4)*Montrer* qu'il existe deux points de C dont on donnera les affixes pour lesquelles

f(M) est minimal. Donner cette valeur minimale.

5)Montrer qu'il existe un seul point de C dont on donnera l'affixe pour lequel f(M)

est maximal. Donner cette valeur maximale.



**

Correction

# Série n°5

**Ex 1**

$z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ ; $\theta \in \mathbb{R} \setminus \{(2k+1)\pi ; k \in \mathbb{Z}\}$

1) On a $\frac{1+z}{1-z} = e^{i\theta}$

$\Leftrightarrow 1+z = e^{i\theta} - z.e^{i\theta}$

$\Leftrightarrow z(1+e^{i\theta}) = e^{i\theta} - 1$

$\Leftrightarrow z = \frac{e^{i\theta}-1}{e^{i\theta}+1}$

$= \frac{e^{i\theta/2}\left(e^{i\theta/2} - e^{-i\frac{\theta}{2}}\right)}{e^{i\theta/2}\left(e^{i\theta/2} + e^{-i\frac{\theta}{2}}\right)}$

$= \frac{2i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\cancel{2}.\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}$

$= i\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$

2) $\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^3 = i$

$\Leftrightarrow \frac{1+z}{1-z}$ est une racine cubique de $i$

or $z_k = e^{i\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}\right)}$ ; $k \in \{0,1,2\}$

d'où $\frac{1+z}{1-z} = e^{i\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}\right)}$ ; $k \in \{0,1,2\}$

d'où $z_k = i\tan\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}\right)$ ; $k \in \{0,1,2\}$

$S_{\mathbb{C}} = \left\{ i\tan\left(\frac{\pi}{12}\right) ; i\tan\left(\frac{5\pi}{12}\right) ; i\tan\left(\frac{3\pi}{4}\right) \right\}$

**Ex 2**

$A(2)$ ; $B(3)$ ; $M(z \neq i)$ ;

$M'\left(z' = \frac{\bar{z}-3}{\bar{z}-i}\right)$

1) $z' - 1 = \frac{1}{2-\bar{z}}$

On a $(z'-1)(2-\bar{z}) = 1$

sig $|z'-1|.|2-z| = 1$.

sig. $IM'.AM = 1$.

on a : $\arg\left[(z'-1)(2-\bar{z})\right] \equiv 0\ [2\pi]$

$\Leftrightarrow \arg(z'-1) + \arg(\bar{z}-2) + \pi \equiv 0\ [2\pi]$

$\Leftrightarrow \arg(z'-1) - \arg(z-2) \equiv -\pi\ [2\pi]$.

$\Leftrightarrow (\vec{u}, \widehat{\overrightarrow{IM'}}) - (\vec{u}, \widehat{\overrightarrow{AM}}) \equiv \pi\ [2\pi]$.

$\Leftrightarrow (\overrightarrow{AM}, \widehat{\overrightarrow{IM'}}) \equiv \pi\ [2\pi]$.

2) Si $M \in \mathscr{C}_{(A,1)}$, on a $AM = 1$.

d'où $IM' = 1 \Leftrightarrow M' \in \mathscr{C}_{(I,1)}$.

de plus $(\overrightarrow{AM}, \widehat{\overrightarrow{IM'}}) \equiv \pi\ [2\pi]$.

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{IM'}$ colinéaires de sens contra

$\Leftrightarrow M' \in$ à la droite $// (AM)$ passant par $I$

$\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{IM'}$ de sens contraires.

d'où $M' \in \mathscr{C} \cap \Delta$.

3) $M \in \mathscr{C}_{2(B,1)}$.

$\Leftrightarrow$ ~~(…)~~ $BM = 1$.

$\Leftrightarrow |z-3| = 1$.

or $M \in \mathscr{C}_{2(B,1)}$, il existe un réel $\alpha$ $\in ]-\pi, \pi]$ tq :

$(\overrightarrow{OI}, \widehat{\overrightarrow{BM}}) \equiv \alpha\ [2\pi]$.

$\Rightarrow \arg(z-3) \equiv \alpha\ [2\pi]$

d'où $\begin{cases} |z-3| = 1 \\ \arg(z-3) \equiv \alpha\ [2\pi] \end{cases}$

$\Rightarrow z - 3 = e^{i\alpha}$

$z = e^{i\alpha} + 3$.

$\alpha = \pi$, $z = A$ impos

b) $z'-1 = \frac{1}{2-\bar{z}}$

$= \frac{1}{2-3-e^{-i\alpha}}$

$= \frac{-1}{1+e^{-i\alpha}}$

$= \frac{-1}{e^{-i\frac{\alpha}{2}}\left(e^{-i\alpha/2}+e^{+i\alpha/2}\right)}$

$= \frac{-1}{2\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \cdot e^{+i\frac{\alpha}{2}}$

$= \frac{1}{2\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \cdot e^{i\left(\frac{\alpha}{2}+\pi\right)}$

car $\frac{\alpha}{2} \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[ \Rightarrow \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) > 0$.

c) On a $z' = \frac{1}{2} - \frac{i}{2} \cdot \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)$

Pour un point $M' \in \mathcal{E}_2$ :

On a : $M' \in \Delta : x = \frac{1}{2}$

$M'$ ∈ à la parallèle à $(AM)$, passant par $I$.

Ex3 (E) : $\left(\frac{z+2i}{z}\right)^4 + 4 = 0$

1) Soit $\mathcal{E} = \{ M(z) \,/\, |z+2i| = \sqrt{2} \cdot |z| \}$

$M \in \mathcal{E}$, ssi $|z+2i| = \sqrt{2}\, |z|$ ; on pose $\{A(-2i)\}$

$\iff AM = \sqrt{2} \cdot OM$

$\iff AM^2 = 2 \cdot OM^2$

$\iff \vec{AM}^2 - 2 \cdot \vec{OM}^2 = 0$

$\iff (\vec{AM} - \sqrt{2} \cdot \vec{OM}) \cdot (\vec{AM} + \sqrt{2} \cdot \vec{OM}) = 0$

On pose $G = \text{bary}[(A,1)(O,-\sqrt{2})]$

$G' = \text{bar}[( \ldots$

$\iff \vec{GM}(1-\sqrt{\ldots}$

ssi $\vec{GM} \cdot \vec{G'M} = 0$

ssi $G \in \mathcal{E}_{[GG']}$

$\mathcal{E} = \mathcal{E}_{[GG']}$

2) Si $z$ solution de (E) :

$\left(\frac{z+2i}{z}\right)^4 + 4 = 0$

$\iff \left(\frac{z+2i}{z}\right)^4 = 4$ ;

$\iff \left|\frac{z+2i}{z}\right|^4 = 4$ ; $\left|\frac{z+2i}{z}\right| > 0$

$\iff \left|\frac{z+2i}{z}\right| = \sqrt{2}$

$\iff |z+2i| = \sqrt{2} \cdot |z|$

$\iff M \in \mathcal{E}$.

4) On pose $\mathfrak{z} = 1 + \frac{2i}{z}$

$\iff \mathfrak{z} - 1 = \frac{2i}{z}$

$\iff z = \frac{2i}{\mathfrak{z} - 1}$

L'équation devient :

$\mathfrak{z}^4 = 4$

$\mathfrak{z}$ solution de (E) ssi

$\mathfrak{z} = \sqrt[4]{4} \cdot e^{i\frac{\pi + 2k\pi}{4}}$, $k \in \{0,1,2,3\}$

$= \sqrt{2} \cdot e^{i\left(\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}\right)}$

⋮

$S_{\mathbb{C}} = \left\{ 2, -2, \frac{2}{5} - \frac{4}{5} i ; \frac{-2}{5} - \frac{4}{5} i \ldots \right.$

**Ex 4** $\quad Z^5 = e^{i\frac{2\pi}{3}}$

1) Les sl°s de l'equation sont de la forme :

$$Z_k = e^{i\left(\frac{2\pi}{15} + \frac{2\pi K}{5}\right)} \quad ; K \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$$

$$S_{\mathbb{C}} = \left\{ e^{i2\pi/5} ; e^{i\frac{8\pi}{15}} ; e^{i\frac{14\pi}{15}} ; e^{i\frac{-2\pi}{3}} ; e^{i\frac{26\pi}{15}} \right\}$$

2) b) On a si $Z^5 = e^{i2\pi/3}$

$$Z^{15} = e^{i2\pi} = 1.$$

donc $Z$ est une racine quinzième de l'unité.

$$Z_K = e^{i\left(\frac{2\pi K}{15}\right)} \quad ; K \in \{1, 2, 3, \dots, 14\}$$

**Ex 5** $\quad E(1) ; F(i)$

$\theta \in [0, 2\pi[ \; ; \; M(1 + e^{i\theta})$

$N(i(1 + e^{i\theta}))$

On a : $aff(\vec{EM}) = Z_M - Z_E$

$= e^{i\theta}$

$aff(\vec{FN}) = \cancel{i} + ie^{i\theta} - \cancel{i}$

$= ie^{i\theta}$

b) On a $Z_M = 1 + e^{i\theta}$

$\iff |Z_M - 1| = |e^{i\theta}|$

$\iff EM = 1 \quad ; \theta \in [0, 2\pi[.$

d'où $M$ varie sur $\mathscr{C}_{(E,1)}$.

De même $FN = 1 \; ; \; \theta \in [0, 2\pi[$

$\Rightarrow M$ varie $\mathscr{C}_{(F,1)}$

c) On a : $\dfrac{aff(\vec{FN})}{aff(\vec{EM})} = \dfrac{ie^{i\theta}}{e^{i\theta}} = i \in i\mathbb{R}$

d'où $\vec{FN} \perp \vec{EM}$

2) $P(Z_P = (1-i) \cdot \sin\theta \cdot e^{i\theta})$

a) On a :

$$\frac{aff(\vec{EP})}{aff(\vec{EM})} = \frac{(1-i)\sin\theta \cdot e^{i\theta} - 1}{e^{i\theta}}$$

$= \sin\theta - i \cdot \sin\theta - e^{-i\theta}$

$= \sin\theta - i\sin\theta - \cos\theta + i\sin\theta$

$= \sin\theta - \cos\theta.$

On a $\dfrac{aff(\vec{FP})}{aff(\vec{FN})} = \dfrac{1-i}{i} \sin\theta - e^{-i\theta}$

$= -i(1-i) \cdot \sin\theta - \cos\theta + i$

$= -i \cdot \sin\theta - \sin\theta - \cos\theta + is$

$= -\sin\theta - \cos\theta.$

b) On a $\dfrac{aff(\vec{EP})}{aff(\vec{EM})} = \sin\theta - \cos\theta \in$

$\iff \vec{EP}$ et $\vec{EM}$ colinéaires

$\iff P \in (EM)$

de m $\dfrac{aff(\vec{FP})}{aff(\vec{FN})} \in \mathbb{R}$

$\iff P \in (FN)$

d'où $\{P\} = (EM) \cap (FN).$

# Série 5.

## Ex6/

(E) : $z^2-(1-i)(m+1)z-i(m^2+1)=0$.

1) $i$ une solution de (E) ssi

$$i^2-(1-i)(m+1)i-i(m^2+1)=0.$$

$$\iff im^2+(1+i)m+2+2i=0.$$

$\Delta=b^2-4ac$

$=8-6i$

$=9-2.3.i+i^2$

$=(3-i)^2$

On pose $\delta=3-i$ une racine carrée de $\Delta$.

d'où $m_1=\frac{-1-i-3+i}{2i}$ ; $m_2=\frac{-1-i+3-i}{2i}$

$\iff m_1=2i$ ; $m_2=-i-1$.

d'où : $z_0=i$ une solution de (E) ssi

$m=2i$ ou $m=-1-i$.

* pour $m=-1-i$ ;

$z_0=i$

$z_1=\frac{c}{a.z_0}$ avec $c=-i(2i+1)$
$=2-i$

$=\frac{2-i}{i}$

$=-2i-1$

$S_{\mathbb{C}}=\{i,-2i-1\}$

* pour $m=2i$ ;

$z_0=i$

$z_1=\frac{c}{a.z_0}$ avec $c=3.i=+3i$

$=\frac{+3i}{i}$

$=3$

2)a/ On a : (E) : $z^2-(1-i)(m+1)z-i(m^2+1)$

$\Delta=\frac{((1-i)(m+1))^2+4i(m^2+1)}{}$

$=-2i.(m^2+2m+1)+4im^2+4i$

$=(-2im^2-4im-2i+4im^2+4i$

$=2im^2-4im+2i$

$=2i(m^2-2m+1)$

$=2i(m-1)^2$

$=(1+i)^2(m-1)^2$

On pose $\delta=(1+i)(m-1)$ une racine carrée de $\Delta$.

(Calcul) $\Rightarrow S_{\mathbb{C}}=\{m-i\ ;\ 1-im$

b)

On a $z_1=m-i$

$=i.e^{i\theta}-i$

$=i(e^{i\theta}-1)$

$=i\,e^{i\theta/2}(e^{i\theta/2}-e^{-i\theta/2})$

$=i.e^{i\theta/2}.2i\sin(\frac{\theta}{2})$

$=-2\sin(\frac{\theta}{2}).e^{i\theta/2}$

$=2.\sin(\frac{\theta}{2}).e^{i(\frac{\theta}{2}+\pi)}$

$]0,2\pi[\iff\frac{\theta}{2}$

On a $Z_2 = 1 - im$

$= 1 + e^{i\theta}$

$= e^{i\theta/2}\left(e^{i\theta/2} + e^{-i\theta/2}\right)$

$= 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot e^{i\frac{\theta}{2}}$

or $\frac{\theta}{2} \in ]0,\pi[$

* $1^{er}$ Cas : Si $\theta \in ]0,\pi[ \iff \frac{\theta}{2} \in ]0,\frac{\pi}{2}[$

$\Rightarrow \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) > 0$

$Z_2 = 2 \cdot \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot e^{i\frac{\theta}{2}}$ ; $\arg(Z_2) \equiv \frac{\theta}{2}\ [2\pi]$

$|Z_2| = 2 \cdot \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$.

* $2^{ème}$ Cas : Si $\theta \in ]\pi, 2\pi[$

$\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) < 0$

$\iff Z_2 = -2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot e^{i\left(\frac{\theta}{2}+\pi\right)}$

$\arg(Z_2) \equiv \frac{\theta}{2} + \pi\ [2\pi]$

$|Z_2| = -2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$

* $3^{ème}$ Cas : $\theta = \pi$ ; $\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = 0$.

$\Rightarrow Z_2 = 0$

$|Z_2| = 0$ ; $Z_2$ n'a pas d'argument.

3/ $A(2i)$ ; $M_1(m-i)$ ; $M_2(1-im)$.

On a $\begin{cases} AM_2 = \sqrt{2} \cdot AM_1 \\ (\widehat{\overrightarrow{AM_1}, \overrightarrow{AM_2}}) \equiv -\frac{\pi}{4}\ [2\pi] \end{cases}$

On a $\begin{cases} \frac{AM_2}{AM_1} = \sqrt{2} \\ \arg\left(\frac{Z_{M_2} - Z_A}{Z_{M_1} - Z_A}\right) \equiv \frac{-\pi}{4}\ [2\pi] \end{cases}$

d'où $\frac{Z_2 - Z_A}{Z_1 - Z_A} = 1 - i$

$\iff \frac{1 - im - 2i}{m - i - 2i} = 1 - i$

$\iff 1 - im - 2i = (1-i)(m-3i)$.

$\iff m = 4 + i$

Ex 7

$(E')$ : $2z^2 - (1+3i)z - 2 = 0$

1) $\Delta = (1+3i)^2 + 16$

$= 1 + 6i - 9 + 16$

$= 8 + 6i$

$= (3+i)^2$

Soit $\delta$ une racine carrée de $\Delta$ tq : $\delta = 3$

$z_1 = \frac{1+3i+3+i}{4}$ ; $z_2 = \frac{1+3i-3-i}{4}$

$z_1 = 1 + i$ ; $z_2 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$.

$S_{\mathbb{C}} = \left\{1+i \,;\, -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right\}$

2) a/ On a $2z^3 - (1+5i)z^2 - (5-i)z + 2$

Soit $z_0 = iy$ la sln imaginaire de $(E)$ / $y$

On a $-2iy^3 + y^2 + 5iy^2 - 5iy - y + $

$\iff -2iy^3 + y^2 + 5iy^2 - 5i - y + 2i = 0$

$\iff y^2 - y + i(-2y^3 + 5y^2 - 5 + 2) = 0$.

$\begin{cases} y^2 - y = 0 \quad (1) \\ -2y^3 + 5y^2 - 5 + 2 = 0 \end{cases}$

$\iff (1)\ y = 0$ ou $y = 1$

(à rejeter) $\Rightarrow y = 1$

$z_0 = i$.

b/ Comme $z_0 = i$ est une sln de $(E)$. On a

$(z - i)(2z^2 + bz + 2) = 2z^3 - (1+5i)z^2 - (5-$

$+2i$

$2z^3 + bz^2 - 2iz^2 + 2z - ibz + 2i$

$2z^3 - (1+5i)z^2 - (5-$

$\Leftrightarrow$ ~~$2iz^2 + z(\frac{1}{5} - 2i)$~~ Tout calcul fait

$(E) \Leftrightarrow (z-i)(2z^2-(1+3i)z-2)=0$

déq : $z=i$ ou $z=1+i$ ou $z=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$.

$S_E=\{i\,;\,1+i\,;\,-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\}$

2) $z_A=\sqrt{2}\,.\,e^{i\pi/4}$

$z_B=\frac{\sqrt{2}}{2}\,.\,e^{3i\pi/4}$

3) a/ $e^{2i\alpha}-1=e^{i\alpha}\left(e^{i\alpha}-e^{-i\alpha}\right)$

$=2i\sin\alpha\,.\,e^{i\alpha}$

b/ On a $f(M)=MA\times MB.$

$=\left|(z_A-z)\times(z_B-z)\right|$

$=\left|(1+i-e^{i\alpha})\left(-\frac{1}{2}(1-i)-e^{i\alpha}\right)\right|$

$=\left|-1-(1+i).e^{i\alpha}+\frac{1}{2}(1-i)e^{i\alpha}+e^{i2\alpha}\right|$

$=\left|e^{i2\alpha}-1-e^{i\alpha}\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i\right)\right|$

c/ $f(M)=\left|e^{i2\alpha}-1-\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i\right)e^{i\alpha}\right|$

$=\left|e^{i\alpha}\right|.\left|2i\sin\alpha-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}i\right|$

$=\left|-\frac{1}{2}+i\left(2\sin\alpha-\frac{3}{2}\right)\right|$

$=\sqrt{\frac{1}{4}+\left(2\sin\alpha-\frac{3}{2}\right)^2}$

4) $f(M)$ est minimale ssi

$2\sin\alpha-\frac{3}{2}=0$

$\Leftrightarrow\ \sin\alpha=\frac{3}{4}.$

or $\alpha\in[0,2\pi]$ et $\frac{3}{4}\in[0,1]$

donc il existe deux réels $\alpha_1$ et $\alpha_2$

tq $\sin\alpha=\frac{3}{4}.$

On a $\sin\alpha=\frac{3}{4}\Leftrightarrow\cos^2\alpha=1-\frac{9}{16}$

$=\frac{7}{16}$

$\cos\alpha=\frac{\sqrt{7}}{4}$ ou $\cos\alpha=\frac{-\sqrt{7}}{16}$

d'où $z=e^{i\alpha}$

$=\frac{\sqrt{7}}{4}+i\,\frac{3}{4}$

ou $z=\frac{-\sqrt{7}}{4}+i.\frac{3}{4}.$

5) $f$ maximale ssi $\left(2\sin\alpha-\frac{3}{2}\right)^2$ est maximale

$\Leftrightarrow\ \sin\alpha=-1$ or on a $\alpha\in[$

donc $\alpha=\frac{3\pi}{2}$

il existe alors un point $M'''$ de $\mathcal{C}$ tel que $f(M)$ maximale

$M'''$ est d'affixe $z'''=e^{i3\pi/2}=-i$