Exercice 1

Le plan est muni du repère orthonormé direct $(O ; \vec{u} ; \vec{v})$.
On appelle A et B les points d'affixes respectives -1 et 1.
On note (E) l'ensemble des points du plan distincts de A, O, et B.
A tout point M d'affixe z de l'ensemble (E), on associe le point N d'affixe z^2 et le point P d'affixe z^3.

1) Prouver que les points M, N et P sont deux à deux distincts.
2) On se propose dans cette question, de déterminer l'ensemble $(\mathcal{E})$ des points M appartenant à (E) tels que le triangle MNP soit rectangle en P.
   a) Montrer que le triangle MNP est rectangle en P si et seulement si $|z+1|^2+|z|^2=1$.
   b) Démontrer que $|z+1|^2+|z|^2=1$ équivaut à $\left(z+\frac{1}{2}\right)\overline{\left(z+\frac{1}{2}\right)}=\frac{1}{4}$.
   c) En déduire l'ensemble $(\mathcal{E})$.
3) Déterminer l'ensemble (F) des points M appartenant à (E) tels l'affixe de P soit un réel strictement positif.
4) Représenter les ensembles $(\mathcal{E})$ et (F).
5) Déterminer les affixes des points M de (E) tels que le triangle MNP soit rectangle en P. l'affixe de P étant un réel strictement positif.

Exercice 2

Le plan P est muni du repère orthonormé direct $(O ; \vec{u} ; \vec{v})$.

1) Au nombre complexe a, on associe le point A d'affixe a.
   a) Représenter dans P l'ensemble $(\Im)$ des points A tels que $|a| = |a-1|$
   b) Montrer que si $A \in (\Im)$ alors $a-1 = -\bar{a}$.
   c) En déduire la relation : $\arg(a) + \arg(a-1) \equiv \pi \quad [2\pi]$.
2) On se propose de résoudre dans C l'équation (E) : $z^3 = i(z-1)^3$
   a) Montrer que si z est solution de (E) alors $|z| = |z-1|$
   b) On pose $\arg(z) \equiv \theta \quad [2\pi]$. Pour quelles valeurs de θ, z est – il solution de (E) ?
   c) Construire dans P, les images des solutions de (E) puis écrire sous forme trigonométrique ces solutions. (on ne cherchera pas à calculer les cosinus des réels trouvés).

Exercice 3

1) On considère dans $\mathbb{C}$ les complexes z_1 et z_2 de module 1 et d'arguments respectifs α et β.

Montrer que $\dfrac{(z_1+z_2)^2}{z_1.z_2}$ est un réel positif ou nul. Dans quel cas est – il nul ?

2) Soit deux points A et B du plan complexe, rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$ d'affixes respectives a et b. On suppose que O, A et B ne sont pas alignés.

a) Calculer en fonction de a et b l'affixe z du point I barycentre de $(A, |b|)$ et $(B, |a|)$.

b) A l'aide de 1) ; montrer que $\dfrac{z^2}{a.b}$ est réel strictement positif.

Exprimer arg (z) en fonction de arg (a) et arg (b).

En déduire que $(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OI}) \equiv (\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OB}) \quad [2\pi]$.

Exercice 4

1)Montrer que pour tout réel θ, $1 - e^{i\theta} = -2i \cdot \sin\frac{\theta}{2} \cdot e^{i\frac{\theta}{2}}$.

2)a)Vérifier que pour tout nombre complexe $z \neq 1$ et pour tout entier $n \geq 2$,

$$1 + z + z^2 + \dots + z^{n-1} = \frac{1 - z^n}{1 - z}.$$

b) En déduire que pour tout entier $n \geq 2$, $1 + e^{i\frac{\pi}{n}} + e^{i\frac{2\pi}{n}} + \dots + e^{i\frac{(n-1)\pi}{n}} = \frac{2}{1 - e^{i\frac{\pi}{n}}}$.

c)Montrer alors que pour tout entier $n \geq 2$, $\sin\frac{\pi}{n} + \sin\frac{2\pi}{n} + \dots + \sin\frac{(n-1)\pi}{n} = \operatorname{cotg}\frac{\pi}{2n}$.

Exercice 5

Dans le plan complexe P rapporté à un repère orthonormé direct $(0; \vec{u}; \vec{v})$; on considère le point A d'affixe $Z = i - i\, e^{i\theta}$; où θ est un réel de $]0;\pi[$.

1) Déterminer l'ensemble (Γ) des points A quand θ décrit $]0;\pi[$.

2) Soit B et C les points d'affixes respectives $Z_1 = \overline{Z}$ et $Z_2 = \frac{Z^2}{\overline{Z}}$.

   a) Ecrire Z_1 et Z_2 sous forme exponentielle.
   b) Vérifier que A et B sont distincts et montrer que $AC = AB$.
   c) Déterminer en fonction de θ une mesure de l'angle $(\vec{AB}; \vec{AC})$.
   d) Déterminer θ pour que le triangle ABC soit équilatéral.

Prof : M Ben Ali

Correction | Série 4

Ex 1

1) N et M confondus. $Z^2 = Z$

$\Leftrightarrow Z = 1$ ou $Z = 0$

or $M \neq B$ et $M \neq 0$.

$\Rightarrow$ Impossible.

de m̂ pour M et P, N et P.

2) $\mathcal{E} = \{ M \in E / \vec{MP} \perp \vec{NP} \}$

On a $M \in \mathcal{E}$ sig

$\vec{MP} \perp \vec{NP}$ sig

$\frac{aff(\vec{MP})}{aff(\vec{NP})} \in i\mathbb{R}$ sig

$\frac{z^3 - z}{z^3 - z^2} \in i\mathbb{R}$ sig

$\frac{z(z^2-1)}{z(z^2-z)} \in i\mathbb{R}$ sig

$\frac{(z-1)(z+1)}{z.(z-1)} \in i\mathbb{R}$ sig

$\frac{z+1}{z} \in i\mathbb{R}$ sig

$\frac{aff(\vec{AM})}{aff(\vec{OM})} \in i\mathbb{R}$ sig

(1ère méthode)

$\vec{OM} \perp \vec{AM}$ sig $M \in \mathcal{E}_{[OA]} \setminus \{A, O\}$.

2ème méthode :

a) $MN^2 = MP^2 + PN^2$

sig $|z^2 - z|^2 = |z^3 - z|^2 + |z^2 - z^3|^2$; $z \neq 0$.

sig $|z - 1|^2 = |z^2 - 1|^2 + |z - z^2|^2$; $1 - z \neq 0$

sig $1 = |z+1|^2 + |z|^2$

b) On a $|z+1|^2 + |z|^2 = 1$

sig $(z+1)(\overline{z+1}) + z.\bar{z} = 1$

sig $z\bar{z} + z + \bar{z} + z.\bar{z} = 0$

sig $z.\bar{z} + \frac{1}{2}.z + \frac{1}{2}\bar{z} = 0$

sig $z.\bar{z} + \frac{1}{2}.z + \frac{1}{2}\bar{z} + \frac{1}{4} = 1/4$

sig $z(\bar{z} + \frac{1}{2}) + \frac{1}{2}(\bar{z} + \frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$

sig $(z + \frac{1}{2})(\overline{z + \frac{1}{2}}) = \frac{1}{4}$.

c) $\mathcal{E} = \{ M \in E / MNP$ rectangle en $P \}$.

or MNP rectangle en P

sig $|z+1|^2 + |z|^2 = 1$

sig $(z + \frac{1}{2})(\overline{z + \frac{1}{2}}) = \frac{1}{4}$

sig $|z + \frac{1}{2}|^2 = \frac{1}{4}$; $|z + \frac{1}{2}| > 0$

sig $|z + \frac{1}{2}| = \frac{1}{2}$.

sig $\mathcal{E} = \mathcal{E}_{(I, \frac{1}{2})}$ avec $I(-\frac{1}{2})$

privé de O, A.

3) $F = \{ M \in E / z_P \in \mathbb{R}_+^* \}$.

$M \in F$ ssi $z_P \in \mathbb{R}_+^*$

sig $z^3 \in \mathbb{R}_+^*$

sig $3\arg(z) = 2K\pi$; $K \in \mathbb{Z}$.

sig $\arg(z) = \frac{2K\pi}{3}$, $K \in \{0, 1, 2\}$.

Ainsi. pour $K = 0$; $\arg(z) = 0$

ssi $z \in [O, \vec{u}) \setminus \{0\}$.

. pour $K = 1$; $\arg(z) = \frac{2\pi}{3}$

ssi $z \in [O, \vec{OT}) \setminus \{0\}$

avec $(\widehat{\vec{u}, \vec{OT}}) = \frac{2\pi}{3} [2\pi]$

. pour $K = 2$; $\arg(z) = \frac{4\pi}{3}$

ssi $z \in [O, \vec{OT'}) \setminus \{0\}$

avec $(\widehat{\vec{u}, \vec{OT'}}) = \frac{-2\pi}{3} [2\pi]$

ainsi $F = ([O, \vec{u}) \cup [O, \vec{OT}) \cup [O, \vec{OT'}))$

5) $M \in \mathcal{E} \cap F$.

On a $]O,B) \cap \mathcal{E} = \emptyset$.

• On pose $M_1 = \left(]O, \overrightarrow{OI}) \setminus \{O\}\right) \cap \mathcal{E}$.

On a $\arg(z_{M_1}) \equiv \frac{2\pi}{3} \; [2\pi]$

or dans le triangle OIM_1 :

$IO = IM_1$ car $M_1 \in \mathcal{E}$

et $I\hat{O}M_1 = \frac{\pi}{3}$

alors OIM_1 est équilatéral.

d'où $OM_1 = IO = \frac{1}{2} \iff |z_{M_1}| = \frac{1}{2}$

alors $z_{M_1} = \frac{1}{2} \cdot e^{i\frac{2\pi}{3}}$

de même pour $M_2 =]O, \overrightarrow{OI'}) \cap \mathcal{E}$.

$z_{M_2} = \frac{1}{2} e^{-2i\frac{\pi}{3}}$

Ex 5

$A(z = i - i \cdot e^{i\theta})$; $\theta \in]0,\pi[$

1) $\Gamma = \{ A(z) \; / \; \theta \in]0,\pi[\}$

$M \in \Gamma$ ssi $z = i - i e^{i\theta}$

ssi $z - i = -i e^{i\theta}$

ssi $z - i = e^{i(\theta - \frac{\pi}{2})}$

ssi $\begin{cases} |z-i| = 1 \\ \arg(z-i) \equiv \theta - \frac{\pi}{2} \; [2\pi] \end{cases}$

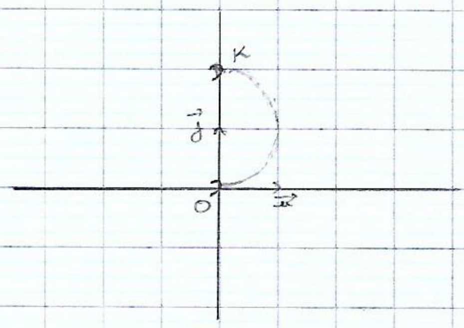
On pose $J(i)$

ssi $\begin{cases} JM = 1 \\ (\vec{u}, \overrightarrow{JM}) \equiv \theta - \frac{\pi}{2} \; [2\pi] \end{cases}$

or $\theta - \frac{\pi}{2} \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

donc M décrit l'arc $]\overset{\frown}{OK}[$

avec $K(2i)$



2) $B(z_1 = \bar{z})$; $C\left(z_2 = \frac{z^2}{\bar{z}}\right)$

a/ $z_1 = \bar{z}$

$= \overline{i - i e^{i\theta}}$

$= -i + i e^{-i\theta}$

$= -i(1 - e^{-i\theta})$

$= -i \cdot e^{-i\theta/2}\left(e^{+i\frac{\theta}{2}} - e^{-i\frac{\theta}{2}}\right)$

$= -i \cdot e^{-i\theta/2} \cdot \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot 2i$

$= 2 \cdot \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot e^{-i\theta/2}$

On a $\theta \in]0,\pi[$

ssi $\frac{\theta}{2} \in]0, \frac{\pi}{2}[$

ssi $\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) > 0$

d'où $\begin{cases} |z_1| = 2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ \arg(z_1) \equiv -\frac{\theta}{2} \; [2\pi] \end{cases}$

$z_1 = 2\sin\frac{\theta}{2} \cdot e^{-i\frac{\theta}{2}}$

• On a $z_2 = \frac{z^2}{\bar{z}}$

$= \frac{\left(2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot e^{i\frac{\theta}{2}}\right)^2}{2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot e^{-i\frac{\theta}{2}}}$

$= \frac{4 \cdot \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \ldots}{2 \cdot \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \ldots}$

Série N° 4

Ex 5

2) a/ $Z_2 = 2 \cdot \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot e^{i\frac{3\theta}{2}}$

b/ On suppose que $Z_A = Z_B$.

sig $z = \overline{z}$

Sig $z \in \mathbb{R}$.

Sig $2 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot e^{i\frac{\theta}{2}} \in \mathbb{R}$

absurde car

$z \in \mathbb{R}$ sig $\arg(z) = K\pi$; $K \in \mathbb{Z}$

or $\arg(z) = \frac{\theta}{2} \neq K\pi$, $K \in \mathbb{Z}$.

d'où $Z_A \neq Z_B$

sig A et B distincts.

On a $AC = |z_C - z_A|$

$\iff AC = \left| \frac{z^2 - z \cdot \overline{z}}{\overline{z}} \right|$

$\iff AC = \left| \frac{z\,(z - \overline{z})}{\overline{z}} \right|$

$\iff AC = \frac{|z|}{|\overline{z}|} \cdot |z - \overline{z}|$

$\iff AC = AB$

c/ $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) \equiv$

$\equiv \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \right) [2\pi]$

$\equiv \arg\left(\frac{\frac{z\,(z - \overline{z})}{\overline{z}}}{(\overline{z} - z)} \right) [2\pi]$

$\equiv \arg\left(\frac{-z}{\overline{z}} \right) [2\pi]$

$\equiv \arg(-z) - \arg(\overline{z}) [2\pi]$

d) Le triangle ABC est tel que :

$AB = AC$

$(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) \equiv \theta + \pi \; [2\pi]$.

ABC equilatéral ssi

$(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) \equiv \frac{\pi}{3} \; [2\pi]$ ou $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) \equiv$

sig $\theta \equiv -\frac{2\pi}{3} [2\pi]$ ou $\theta \equiv -\frac{4\pi}{3}$ [2

or $\theta \in]0, \pi[$.

d'où $\theta \equiv \frac{2\pi}{3} [2\pi]$.

$\theta = \frac{2\pi}{3}$