EXERCICES SUR LES NOMBRES COMPLEXES – 4M

EXERCICE 1 :

On donne les nombres complexes :

$$Z_1=\frac{2012+i2011}{2012-i2011}\ \ et\ \ Z_2=\frac{2012-i2011}{2012+i2011}$$

Montrer que $(Z_1+\ Z_2)$ est réel et $(Z_1-\ Z_2)$ est imaginaire pur .

EXERCICE 2 :

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(o,\vec{u},\vec{v})$. Déterminer et construire:

1) L'ensemble **E** des points M(z) tels que $\left|\frac{Z-2+i}{Z-2i}\right|=1.$
2) L'ensemble **F** des points M(z) tels que $\frac{Z-2+i}{Z-2i}$ soit réel .
3) L'ensemble **G** des points M(z) tels que $\frac{Z-2+i}{Z-2i}$ soit imaginaire .
4) L'ensemble **H** des points M(z) tels que $\frac{Z-2+i}{Z-2i}$ soit un réel strictement négatif .
5) L'ensemble **C** des points M(z) tels que $\arg\left(\frac{Z-2+i}{Z-2i}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$

EXERCICE 3 :

1) On donne le nombre complexe $Z=\sqrt{6}+\sqrt{2}+i(\sqrt{6}-\sqrt{2})$
   a/ calculer Z^2 et donner sa forme trigonométrique.
   b/En déduire la forme trigonométrique de Z.
2) On considère le nombre complexe $Z'=1+\sqrt{3}+i(\sqrt{3}-1)$
   a/ Calculer $(1+i)Z'$ et donner son écriture sous forme trigonométrique .
   b/En déduire la forme trigonométrique de Z' et les valeurs de $\cos\frac{\pi}{12}\ et\ \sin\frac{\pi}{12}$.

EXERCICE 4:

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(\mathrm{O},\vec{\mathrm{u}},\vec{\mathrm{v}})$

On considère les points A, M et M' d'affixes respectives : 1 , z et z^3.

1/ a- Montrer que les points A, M et M' sont alignés si et seulement si $[z=1\ ou\ (1+z+z^2)\in\mathbb{R}]$

b- Déterminer l'ensemble $(\mathrm{E})=\{\mathrm{M}(z)\in\mathrm{P}\ /\ \mathrm{A},\mathrm{M}\text{ et }\mathrm{M}'\text{sont alignés}\}$

2/ a- Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^4=1$.

b- Soit N le point d'affixe $z_N=-(z^2+2)$

Déterminer les nombres complexes z pour que le quadrilatère AMNM' soit un parallélogramme.

EXERCICE 5:

1) Montrer que pour tous réels $\alpha\ et\ \beta$ on a :

$$e^{i\alpha}+e^{i\beta}=2\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)e^{i\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}\quad \text{et}\quad e^{i\alpha}-e^{i\beta}=2\,i\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)e^{i\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}$$

2) Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(o,\vec{u},\vec{v})$
   soient $\theta\epsilon]-\pi,\pi[\,,z_1=sin\theta+i\,cos\theta\,,z_2=1+cos\theta+isin\theta\ \ et\ z_3=\frac{z_1}{z_2}$
   a) Donner la forme trigonométrique de z_1 , z_2 et z_3.
   b) Déterminer les ensembles décrits par $M_1(z_1)$; $M_2(z_2)$ et $M_3(z_3)$ lorsque θ décrit $]-\pi,\pi[$.

EXERCICE 6:

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(o,\vec{u},\vec{v})$

1) On considère les nombres complexes $z_1=e^{i\alpha}$ et $z_2=e^{i\beta}$. Montrer que $\frac{(z_1+z_2)^2}{z_1z_2}\in\mathbb{R}^+$.
2) Soient A et B deux points distincts de O et d'affixes respectifs a et b.
   a/Calculer en fonction de a et b l'affixe z du barycentre G des points pondérés $(A,|b|)\ et\ (B,|a|)$.
   b/Montrer que $\frac{z^2}{ab}$ est un réel strictement positif.
   c/ Exprimer $arg(z)$ en fonction de $\arg(a)$ et $\arg(b)$ .En déduire que $\overrightarrow{OG}$ est un vecteur directeur de la bissectrice de l'angle $\widehat{AOB}$.

EXERCICE 7: (B2001)

Dans le point complexe P rapporté à un repère orthonormé $(o,\vec{u},\vec{v})$ on considère les points A et B d'affixes respectives a et 1 où a est un nombre complexe donné différent de 1.

Soit f l'application de $P\setminus\{B\}$ dans P qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe : $z'=\dfrac{z-a}{z-1}$

1) Montrer que les affixes des points invariants par f sont les solutions de l'équation $(E): z^2-2z+a=0$

2) a) On suppose que $a=1+e^{i\theta}$ où $\theta\in\left]\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right[$. Résoudre l'équation E.

b) Mettre sous forme trigonométrique chacune des solutions de E.

3) Dans cette question on suppose que $a=-1$. Soit M un point de $P\setminus\{B\}$ d'affixe z et M' le point d'affixe z'

a) Montrer que $(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{BM}})+(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{BM'}})\equiv 0\,[2\pi]$En déduire que $[BA)$ est une bissectrice de l'angle $(\overrightarrow{BM},\overrightarrow{BM'})$.

b) Montrer que z' est imaginaire pur si et seulement si $|z|=1$.

c) En déduire la construction du point M' image d'un point M du cercle trigonométrique privé du point B.

EXERCICE 8:

1) a) Résoudre dans ℂ, l'équation d'inconnue z suivante : $z^2-2iz-2=0$

b) Mettre les solutions sous forme trigonométrique.

2) Soit $\theta\in\left]0,\pi\right[$, on considère l'équation d'inconnue z complexe : (E) $z^2-2\cdot e^{i\theta}\cdot z+e^{2i\theta}-1=0$

Résoudre l'équation (E).

3) Dans le plan P muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives : $z_1=2\cdot e^{i\theta}$; $z_2=1+e^{i\theta}$ et $z_3=-1+e^{i\theta}$.

a) Ecrire z_2 et z_3 sous forme exponentielle.

b) Montrer que le quadrilatère OBAC est un rectangle.

c) Déterminer le réel θ de $\left]0,\pi\right[$ tel que OBAC soit un carré.

EXERCICE 9:

Soit m un réel non nul.

1) Résoudre dans ℂl'équation : $z^2-2iz-(1+m^2)=0$.

2) Pour tout nombre complexe z, on pose : $f(z)=z^3-3iz^2-(3+m^2)z+i(1+m^2)$.

a) Vérifier que $f(i)=0$; en déduire une factorisation de $f(z)$.

b) Résoudre dans ℂ l'équation $f(z)=0$.

3) Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

On considère les points A, M' et M'' d'affixes respectives i, $i+m$ et $i-m$.

a) Vérifier que A est le milieu du segment $[M'M'']$.

b) Montrer que le triangle $OM'M''$ est isocèle.

c) Déterminer les valeurs de m pour que le triangle $OM'M''$ soit équilatéral.

EXERCICE 10:

1) a) Vérifier que $(\sqrt{3}-3i)^2=-6-6\sqrt{3}i$.

b) Résoudre dans ∀ l'équation : $z^2-(\sqrt{3}+i)z+2+2\sqrt{3}i=0$

2) Le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$. On considère les points A et B d'affixes respectives $2i$ et $\sqrt{3}-i$.

a) Ecrire sous forme trigonométrique les nombres complexes $2i$ et $\sqrt{3}-i$.

b) Placer, dans le plan P, les points A et B.

c) Soit C le point du plan tel que $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OB}$. Déterminer l'affixe du point C.

d) Montrer que le point C appartient au cercle de centre O et passant par A.

e) Montrer que le quadrilatère OACB est un losange.