Lycée pilote de Tunis	nombres complexes 3	Terminales maths
Mr Ben Regaya. A	+ Eléments de corrections	www.ben-regaya.net

Exercice1

Soient A, B et C trois points du plan d'affixes respectifs a, b et c.

Montrer que les points A, B et C sont alignés si et seulement si $a\bar{b}-\bar{a}b+b\bar{c}-\bar{b}c+c\bar{a}-\bar{c}a=0$.

Exercice 2

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$.

1. Déterminer l'ensemble des points d'affixe z tels que $|iz-1|=|\bar{z}+2i|$.
2. Déterminer l'ensemble des points d'affixe z tels que $\dfrac{z}{z+1-i}$ soit réel. (puis le cas d'imaginaire pur)
3. Déterminer l'ensemble des points d'affixe z tels que $z=2i+2e^{i\theta}$ avec θ réel quelconque.
4. Déterminer l'ensemble des points d'affixe z tels que $arg\left(\dfrac{iz-1}{z-2i}\right)\equiv 0[2\pi]$
5. Déterminer l'ensemble (A) des points M d'affixe z tels que $z^2=\left(\bar{z}\right)^2$. Tracer (A).
6. Soit (B) l'ensemble des points M d'affixe z tels que $z^3=\left(\bar{z}\right)^2$.
   a) Déterminer l'ensemble des nombres complexes z tels que $\left|z^3\right|=\left|\bar{z}^2\right|$.
   b) En déduire l'ensemble (B).
7. Déterminer l'ensemble (C) des points M d'affixe z tels que $z\bar{z}-(1+i)\bar{z}-(1-i)z=0$. On pourra poser $Z=z-(1+i)$ et calculer le produit $Z\bar{Z}$. Construire (C).
8. Déterminer l'ensemble des points d'affixe z tels que $(z-a)(z-\bar{a})=a\bar{a}$, avec a complexe.
9. Déterminer l'ensemble des points d'affixe z tels que $|z|=\dfrac{4}{|z|}=|z-2|$.

Exercice3

Soit $z\in\mathbb{C}$, on note M le point d'affixe z, P le point d'affixe z^2 et Q le point d'affixe z^3.

Déterminer le lieu de M pour que :

1. M, P et Q soient alignés.
2. M, P et Q forment un triangle équilatéral.

Exercice 4

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}\right)$. Soit l'application f du plan $P \setminus \{I\}$ dans lui-même qui a tout point $M(z)$ associe le point $M'(f(z))$ telle que $z' = \dfrac{-1+z}{1-\overline{z}}$.

1. Montrer que, pour tout complexe z distinct de 1, $|z'| = 1$.
2. Soient A et B deux points distincts d'affixes a et b différents de 1 et tels que $f(A) = f(B)$.

   a) Montrer que $(a-1)\left(1-\overline{b}\right) = \left(1-\overline{a}\right)(b-1)$.

   b) Déduire que les points A, B et I sont alignés.
3. Soit α un réel appartenant à $]0, 2\pi[$ et K le point d'affixe $e^{i\alpha}$. Montrer que $f(K) = K$.
4. Etant donner un point M du plan d'affixe $z \neq 1$ et M' son image par f.

   a) Montrer qui si $z' \neq 1$ alors $f(M) = f(M')$.

   b) Déduire alors de ce qui précède une construction du point M'.

Exercice 5

Soit ω un complexe fixé.

1. Déterminer les complexes z tels que $z^2 + (2+iw)z + (iw+2-w) = 0$ .On notera z_1 et z_2 les deux solutions.

   A, B les points d'affixes z_1 et z_2 et M d'affixe ω,
2. Déterminer le lieu géométrique des points tels que les points M, A, B soient alignés.

Exercice 6

Soit $\alpha \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ et l'équation (E) : $(1+iz)^3(1-i\tan\alpha) = (1-iz)^3(1+i\tan\alpha)$.

1. Montrer que si z est une solution de (E) alors z est réel.
2. Exprimer $\dfrac{1+i\tan\alpha}{1-i\tan\alpha}$ en fonction de $e^{2i\alpha}$.
3. Soit z un réel. Montrer qu'il existe un réel unique $\theta \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ tel que $\tan\theta = z$.
4. Déterminer alors les solutions de (E).

Lycée pilote de Tunis	nombres complexes 3	Terminales maths
Mr Ben Regaya. A	Eléments de corrections	www.ben-regaya.net

Exercice1

A, B et C sont alignés si et seulement $\frac{b-a}{c-a}=\overline{\left(\frac{b-a}{c-a}\right)} \Leftrightarrow \frac{b-a}{c-a}=\frac{\bar{b}-\bar{a}}{\bar{c}-\bar{a}}$

$\Leftrightarrow (b-a)(\bar{c}-\bar{a})=(c-a)(\bar{b}-\bar{a})$

$\Leftrightarrow b\bar{c}-a\bar{c}-b\bar{a}+a\bar{a}=c\bar{b}-a\bar{b}+a\bar{a}-c\bar{a}$

$\Leftrightarrow a\bar{b}-\bar{a}b+b\bar{c}-\bar{b}c+c\bar{a}-\bar{c}a=0$.

Exercice 2

1. $|iz-1|=|\bar{z}+2i| \Leftrightarrow |i||z+i|=|z-2i| \Leftrightarrow |z-(-i)|=|z-2i| \Leftrightarrow MA=MB$ avec $A(-i)$ et $B(2i)$.
   L'ensemble des points M est la médiatrice de $[AB]$
2. Pour $z \neq i-1$; $\frac{z}{z+1-i}=\frac{z_{\overrightarrow{OM}}}{z_{\overrightarrow{BM}}}$ avec B (i-1).

   Donc $\frac{z}{z+1-i}$ est réel $\Leftrightarrow \overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{BM}$ sont colinéaires $\Leftrightarrow M$ est un point de la droite (OB).

   L'ensemble des points M est la droite (OB) privée du point B. (Pareil pour le cas d'imaginaire pur).
3. $z=2i+2e^{i\theta} \Leftrightarrow z-2i=2e^{i\theta} \Leftrightarrow \begin{cases} |z-2i|=2 \\ arg(z-2i)\equiv\theta[2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} AM=2 \\ (\vec{u},\overrightarrow{AM})\equiv\theta[2\pi] \end{cases}$ avec $\theta \in \mathbb{R}$.

   L'ensemble des points M est le cercle de centre A ($2i$) et de rayon 2.
4. Pour $z \neq i$ et $z \neq 2i$; $arg\left(\frac{iz-1}{z-2i}\right)\equiv 0[2\pi] \Leftrightarrow arg(i)+arg\left(\frac{z+i}{z-2i}\right)\equiv 0[2\pi]$

   $\Leftrightarrow \frac{\pi}{2}+arg\left(\frac{z+i}{z-2i}\right)\equiv 0[2\pi] \Leftrightarrow (\overrightarrow{CM},\overrightarrow{DM})\equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$; C et D les points d'affixes respectives $2i$ et $-i$.

   L'ensemble des points M est le demi cercle ouvert de diamètre $[CD]$ situé dans le demi plan $x \prec 0$.

7. $Z\bar{Z}=z\bar{z}-(1-i)\bar{z}-(1-i)z+2$ donc $z\bar{z}-(1-i)\bar{z}-(1-i)z=0 \Leftrightarrow Z\bar{Z}=2$

   $\Leftrightarrow |Z|^2=2 \Leftrightarrow |z-(1+i)|=\sqrt{2}$

   L'ensemble des points M est le cercle de centre I(1+i) et de rayon $\sqrt{2}$.
8. $(z-a)(\bar{z}-\bar{a})=a\bar{a} \Leftrightarrow |z-a|^2=|a|^2 . \Leftrightarrow AM=OA$

   L'ensemble des points M est le cercle de centre $A(a)$ et de rayon OA.

9. $|z|=\dfrac{4}{|z|}=|z-2| \Leftrightarrow \begin{cases}|z|=\dfrac{4}{|z|}\\ |z|=|z-2|\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}|z|^2=4\\ |z|=|z-2|\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}OM=2\\ OM=AM\end{cases}$ avec $A(2)$.

L'ensemble des points M est l'intersection de la médiatrice de $[OA]$ avec le cercle de centre O et de rayon 2. (Il ya deux points chercher les).

Exercice3

1. M, P et Q alignés $\Leftrightarrow \dfrac{z^3-z}{z^2-z} \in \mathbb{R}$ ou $z^2=z \Leftrightarrow z+1 \in \mathbb{R}$ ou $z=0$ ou $z=1 \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$. Le lieu cherché est l'axe des abscisses.

2. M, P et Q forment un triangle équilatéral $\Leftrightarrow \begin{cases}|z^3-z|=|z^2-z|\\ |z^2-z|=|z^3-z^2|\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}|z||z-1||z+1|=|z||z-1|\\ |z||z-1|=|z^2||z-1|\end{cases}$

On traite à part les cas $z=0$ et $z=1$ (les trois points sont confondus), on peut alors supposer $z\neq 0$ et $z\neq 1$.

On obtient alors $\begin{cases}|z+1|=1\\ |z|=1\end{cases}$. Le point M est donc sur le cercle centré en $A(-1)$ et de rayon 1 et sur le cercle trigonométrique.

On résous donc le système : $\begin{cases}(x+1)^2+y^2=1\\ x^2+y^2=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=-\dfrac{1}{2}\\ x^2+y^2=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=-\dfrac{1}{2}\\ y=\mp\dfrac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$

Les seules possibilités sont $z=e^{i\frac{2\pi}{3}}$ ou $z=e^{-i\frac{2\pi}{3}}$.

Exercice 4

1. $|z'|=\left|\dfrac{-1+z}{1-\bar{z}}\right|=\dfrac{|z-1|}{|1-\bar{z}|}=\dfrac{|z-1|}{|1-z|}=\dfrac{|z-1|}{|z-1|}=1$. rappelons que $|t|=|\bar{t}|$ et $|t|=|-t|$ pour tout complexe t.

2. a) $f(A)=f(B) \Leftrightarrow \dfrac{-1+a}{1-\bar{a}}=\dfrac{-1+b}{1-\bar{b}} \Leftrightarrow (a-1)(1-\bar{b})=(b-1)(1-\bar{a})$.

b) on a : $(a-1)(1-\bar{b})=(b-1)(1-\bar{a})$ donc $arg\left[(a-1)(1-\bar{b})\right]\equiv arg\left[(b-1)(1-\bar{a})\right][2\pi]$ (a et b différents de 1) par suite $arg(a-1)+arg(1-\bar{b})\equiv arg(b-1)+arg(1-\bar{a})[2\pi]$

$\Leftrightarrow arg(a-1)-arg(1-b)\equiv arg(b-1)-arg(1-a)[2\pi]$

$\Leftrightarrow arg(a-1)-\pi-arg(b-1)\equiv arg(b-1)-\pi-arg(a-1)[2\pi]$

$\Leftrightarrow 2arg(a-1)-2arg(b-1)\equiv 0[2\pi] \Leftrightarrow arg(a-1)-arg(b-1)\equiv 0[\pi]$

$\Leftrightarrow (\vec{u},\overrightarrow{IA})-(\vec{u},\overrightarrow{IB})\equiv 0[\pi] \Leftrightarrow (\overrightarrow{IB},\overrightarrow{IA})\equiv 0[\pi]$ et donc $(\overrightarrow{IB},\overrightarrow{IA})=k\pi, k\in\mathbb{Z}$ et donc les points sont alignés.

3. $\dfrac{-1+e^{i\alpha}}{1-e^{-i\alpha}}=\dfrac{(e^{i\alpha}-1)e^{i\alpha}}{(1-e^{-i\alpha})e^{i\alpha}}=\dfrac{(e^{i\alpha}-1)e^{i\alpha}}{(e^{i\alpha}-1)}=e^{i\alpha}$. Ainsi $f(K)=K$.

4. a) $z'\neq 1$ donc $z-1\neq 1-\bar{z} \Leftrightarrow z+\bar{z}\neq 2 \Leftrightarrow Re(z)\neq 1$.

L’affixe du point $f(M')$ est $\dfrac{-1+z'}{1-\overline{z'}} = \dfrac{-1+\dfrac{-1+z}{1-\bar{z}}}{1-\overline{\left(\dfrac{-1+z}{1-\bar{z}}\right)}} = \dfrac{\dfrac{-2+z+\bar{z}}{1-\bar{z}}}{\dfrac{2-z-\bar{z}}{1-z}} = -\dfrac{1-z}{1-\bar{z}} = z'$ on a donc $f(M') = f(M)$.

b) Soit M un point distinct de I.

Si $x_M = 1$ alors $z = 1+iy$, y réel et donc $z' = \dfrac{-1+1+iy}{1-(1-iy)} = 1 = z_I$ ce qui veut dire que $M' = I$.

Tout point du cercle trigonométrique est son propre image.

Si $x_M \neq 1$ et $|z| \neq 1$ donc $z' \neq 1$ on sait que dans ce cas que $f(M) = f(M')$ et que les points M, M' et I sont alignés ce qui veut dire que le point M' est un point de la droite (OM) mais aussi $|z'| = 1$ donc M' est un point du cercle trigonométrique.

M' est alors l’intersection du cercle trigonométrique et de la droite (OM).

Exercice 5

1. On a $\Delta = \left(i(w-2)\right)^2 \Rightarrow z_1 = -1-i$, $z_2 = -iw-1+i$.
2. Les trois points sont alignés si et seulement si $\dfrac{(-iw-1+i)-(-1-i)}{w-(-1-i)} \in \mathbb{R}$ ou $w = -1-i$

Ce qui s’écrit $\dfrac{(-iw-1+i)-(-1-i)}{w-(-1-i)} = \overline{\left(\dfrac{(-iw-1+i)-(-1-i)}{w-(-1-i)}\right)}$ ou $w = -1-i$

$\Leftrightarrow i\dfrac{w-2}{w+1+i} = -i\dfrac{\bar{w}-2}{\bar{w}+1-i}$ ou $w = -1-i$

$\Leftrightarrow 2w\bar{w} - (w+\bar{w}) - i(w-\bar{w}) - 4 = 0$ ou $w = -1-i$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - x + y - 2 = 0$ ou $w = -1-i$

Le lieu de M est donc le cercle de centre $\Omega\left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$ et de rayon $\sqrt{\dfrac{5}{2}}$.

Exercice 6

1. Soit z une solution de (E) alors $(1+iz)^3(1-i\tan\alpha) = (1-iz)^3(1+i\tan\alpha)$

$\Rightarrow |1+iz|^3|1-i\tan\alpha| = |1-iz|^3|1+i\tan\alpha|$

$\Leftrightarrow |1+iz|^3\left(1+\tan^2\alpha\right) = |1-iz|^3\left(1+\tan^2\alpha\right) \Leftrightarrow |1+iz|^3 = |1-iz|^3$ car $1+\tan^2\alpha \neq 0$

$\Leftrightarrow |1+iz| = |1-iz|$ (car la fonction $x \mapsto x^3$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$)

$\Leftrightarrow (1+iz)\times\overline{(1+iz)} = (1-iz)\times\overline{(1-iz)}$

$\Leftrightarrow (1+iz)\times(1-i\bar{z})=(1-iz)\times(1+i\bar{z})$

$\Leftrightarrow \bar{z}=z$ (après simplification bien sur) . Ainsi z est réel.

2. $\dfrac{1+i\,tan\alpha}{1-i\,tan\alpha}=\dfrac{1+i\dfrac{sin\alpha}{cos\alpha}}{1-i\dfrac{sin\alpha}{cos\alpha}}=\dfrac{cos\alpha+i\,sin\alpha}{cos\alpha-i\,sin\alpha}.=\dfrac{e^{i\alpha}}{e^{-i\alpha}}=e^{2i\alpha}$

3. Posons $f(\theta)=tan\theta$; $\theta\in\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$.

f est dérivable sur cet intervalle et $f'(\theta)=1+tan^2\theta\succ 0$, f est alors strictement croissante sur $\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$ et

par suite $f\left(\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[\right)=\left]\lim\limits_{\left(-\frac{\pi}{2}\right)^-} f,\lim\limits_{\left(\frac{\pi}{2}\right)^+} f\right[=\mathbb{R}$

f est continue sur $\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$ et $f\left(\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[\right)=\mathbb{R}$.

Ainsi tout z réel admet un unique antécédent par f. Autrement dit si z est réel alors il existe un réel unique $\theta\in\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$ tel que $tan\theta=z$.

4. Comme $z=tan\theta$ alors l'équation devient $(1+itan\theta)^3(1-i\,tan\alpha)=(1-itan\theta)^3(1+i\,tan\alpha)$

$\Leftrightarrow \left(\dfrac{1+itan\theta}{1-itan\theta}\right)^3=\left(\dfrac{1+itan\alpha}{1-itan\alpha}\right)\Leftrightarrow e^{6i\theta}=e^{2i\alpha}\Leftrightarrow 6\theta=2\alpha+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow \theta=\dfrac{\alpha}{3}+\dfrac{k\pi}{3},\ k\in\{0,1,2\}$.

Ainsi $\theta\in\left\{\dfrac{\alpha}{3},\dfrac{\alpha}{3}+\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\alpha}{3}-\dfrac{\pi}{3}\right\}$ (on rappel que $tan(\pi+a)=tan(a)$).

Finalement les solutions sont donc : $tan\dfrac{\alpha}{3}$; $tan\left(\dfrac{\alpha}{3}+\dfrac{\pi}{3}\right)$; $tan\left(\dfrac{\alpha}{3}-\dfrac{\pi}{3}\right)$.