Lycée pilote de Tunis	Nombres complexes 2	Terminale maths & S-exp
Mr Ben Regaya. A	+ Eléments de corrections	www.ben-regaya.net

Exercice1

On considère les nombres complexes $z_1 = -cos\theta\, e^{i\theta}$ et $z_2 = i\, sin\theta\, e^{i\theta}$ où $\theta \in \left]0;\frac{\pi}{2}\right[$. On désigne par M_1 et M_2 les points images de z_1 et z_2.

On pose I le milieu de $[M_1M_2]$;

1. Déterminer l'affixe z_I du point I.
2. a) Ecrire le complexe $z_1 - z_2$ sous forme exponentielle.

b) Montrer que $OM_1^{\,2} + OM_2^{\,2} = M_1M_2^{\,2}$. Conclure.

3. Montrer que $\left|z_1 + \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$ et déterminer l'ensemble C_1 sur lequel varie le point M_1 .En déduire l'ensemble sur lequel varie le point M_2 .
4. Soit A le point d'affixe -1 .

a) Montrer que $OM_1\ AM_2$ est un rectangle.

b) Déterminer le réel θ pour que $OM_1\ AM_2$ soit un carré.

Exercice 2

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé direct (O; $\vec{u}$, $\vec{v}$) (unité graphique : 2 cm), on considère :

- le point A d'affixe $a = 5 - i\sqrt{3}$;
- le point B tel que le triangle OAB soit équilatéral direct, c'est-à-dire avec

$\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right) = \frac{\pi}{3}\,[2\pi]$;

- le milieu Q de $[OB]$.

1. a) Démontrer que B a pour affixe $b = 4 + 2i\sqrt{3}$. En déduire l'affixe q de Q.

b) Déterminer l'affixe z_K du point K tel que $ABQK$ soit un parallélogramme.

c) Démontrer que $\dfrac{z_K - a}{z_K}$ est imaginaire pur. Qu'en déduit-on pour le triangle OKA ?

Préciser la nature du quadrilatère $OQAK$.

d) Placer les points A, B, Q et K dans le plan.

2. Soit C le point d'affixe $c = \dfrac{2a}{3}$.

a) Calculer $\dfrac{z_K - b}{z_K - c}$. Que peut-on en déduire pour les points B, C et K ?

b) Placer C sur la figure.

Exercice 3

1. Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O;\vec{u};\vec{v}\right)$,on considère les points $A\left(1+ia\right)$ et $B\left(1-ia\right)$ où a est un complexe. On pose $a=a_1+i\,a_2$; a_1 et a_2 réels.

   a) Montrer que les points O, A et B sont alignés si et seulement si, $a_1=0$.

   b) Montrer que $\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OB}\Leftrightarrow |a|=1$.

2. On suppose que a est le complexe de module 1 et d'argument α où $\alpha\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$.

   a) Donner une écriture exponentielle des affixes des points A et B.

   b) Déterminer a pour que les points O, A et B forment un triangle isocèle rectangle en O.

Exercice 4

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$, on considère le point A d'affixe (-1) et les points M, N et P d'affixes respectives z, z^2 et z^3 où z est un nombre complexe non nul différent de (-1) et de 1.

1. a) Montrer que : (le triangle MNP est rectangle en P) si et seulement si ($\frac{1+z}{z}$ est imaginaire pur) .

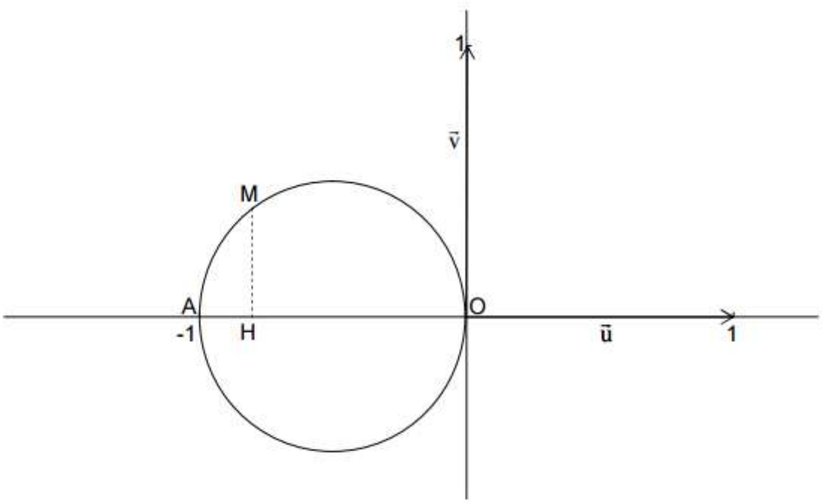
   b) En déduire que l'ensemble des points M tels que le triangle MNP soit un triangle rectangle en P est le cercle (Γ) de diamètre $[OA]$, privé des points O et A.

2. Dans la figure ci-dessous, on a tracé le cercle (Γ) et on a placé un point M d'affixe z sur (Γ) et son projeté orthogonal H sur l'axe $\left(O,\vec{u}\right)$. On se propose de construire les points N et P d'affixes respectives z^2 et z^3 tels que le triangle MNP soit rectangle en P.

   a) Montrer que $\left(\overrightarrow{OM},\overrightarrow{ON}\right)\equiv\left(\vec{u},\overrightarrow{OM}\right)[2\pi]$ puis que $\left(\overrightarrow{ON},\overrightarrow{OP}\right)\equiv\left(\vec{u},\overrightarrow{OM}\right)[2\pi]$.

   b) Montrer que $OH=OM^2$.

   c) Donner un procédé de construction des points N et P puis les construire.



Exercice1

1. $z_I = \dfrac{z_{M_1}+z_{M_2}}{2} = \dfrac{-cos\theta\, e^{i\theta}+isin\theta e^{i\theta}}{2} = \dfrac{-e^{i\theta}\left(cos\theta - isin\theta\right)}{2} = \dfrac{e^{i(\theta+\pi)}e^{-i\theta}}{2} = \dfrac{e^{i\pi}}{2} = -\dfrac{1}{2}$.

2. a) $z_1 - z_2 = -cos\theta\, e^{i\theta} - isin\theta e^{i\theta} = -e^{i\theta}\left(cos\theta + isin\theta\right) = e^{i(\theta+\pi)}e^{i\theta} = e^{i(2\theta+\pi)}$.

   b) $OM_1^2 = |z_1|^2 = \left|-cos\theta\, e^{i\theta}\right|^2 = |-cos\theta|^2\left|e^{i\theta}\right|^2 = |-cos\theta|^2 = cos^2\theta$

   $OM_2^2 = |z_2|^2 = \left|i\, sin\theta\, e^{i\theta}\right|^2 = |i|^2\,|\,sin\theta\,|^2\left|e^{i\theta}\right|^2 = |sin\theta|^2 = sin^2\theta$

   $M_1M_2^2 = |z_2 - z_1|^2 = |z_1 - z_2|^2 = \left|e^{i(2\theta+\pi)}\right|^2 = 1$.

   Or $OM_1^2 + OM_2^2 = cos^2\theta + sin^2\theta = 1$ ainsi $OM_1^2 + OM_2^2 = M_1M_2^2$. Le triangle OM_1M_2 est rectangle en O.

3. $\left|z_1+\dfrac{1}{2}\right| = \left|-cos\theta\, e^{i\theta}+\dfrac{1}{2}\right| = \left|cos\theta\, e^{i\theta}-\dfrac{1}{2}\right| = \left|\left(\dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right)e^{i\theta}-\dfrac{1}{2}\right| = \left|\dfrac{1}{2}e^{2i\theta}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\right| = \left|\dfrac{1}{2}e^{2i\theta}\right| = \dfrac{1}{2}$.

   On a donc $\left|z_1+\dfrac{1}{2}\right| = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \left|z_1-\left(-\dfrac{1}{2}\right)\right| = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow IM_1 = \dfrac{1}{2}$.

   Le point M_1 varie sur le cercle de centre I et de rayon $\dfrac{1}{2}$.

   I étant le milieu de $[M_1M_2]$ donc $M_2 = S_I\left(M_1\right)$ et par suite le point M_2 varie sur le même cercle.

4. a) $z_{\overrightarrow{OM_1}} = z_1$ et $z_{\overrightarrow{M_2A}} = z_A - z_{M_2} = -1 - i\,sin\theta\, e^{i\theta} = -1 - i\left(\dfrac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}\right)e^{i\theta} = -1 - \left(\dfrac{e^{2i\theta}}{2} - \dfrac{1}{2}\right) = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{e^{2i\theta}}{2}$.

   $= -\dfrac{1}{2}\left(e^{2i\theta}+1\right) = -\dfrac{1}{2}\left(e^{i\theta}\left(e^{i\theta}+e^{-i\theta}\right)\right) = -\dfrac{1}{2}e^{i\theta}\times 2cos\theta = -e^{i\theta}\times cos\theta = z_1$.

   On a donc $z_{\overrightarrow{OM_1}} = z_{\overrightarrow{M_2A}} \Leftrightarrow \overrightarrow{OM_1} = \overrightarrow{M_2A}$ et par suite $OM_1\ AM_2$ est un parallélogramme.

   D'autre part $\theta \in \left]0;\dfrac{\pi}{2}\right[$ donc $sin\theta \neq 0$ et par suite $z_2 \neq 0$.

   $\dfrac{z_{\overrightarrow{OM_1}}}{z_{\overrightarrow{OM_2}}} = \dfrac{-cos\theta\, e^{i\theta}}{isin\theta\, e^{i\theta}} = i\dfrac{cos\theta}{sin\theta}$ qui est un complexe imaginaire pur donc $\overrightarrow{OM_1} \perp \overrightarrow{OM_2}$ et le quadrilatère

   OM_1AM_2 est un rectangle.

   b) Pour que OM_1AM_2 soit un carré il suffit d'avoir $OM_1 = OM_2$.

   Mais $OM_1 = OM_2 \Leftrightarrow cos\theta = sin\theta \Leftrightarrow \theta = \dfrac{\pi}{4}$ car $\theta \in \left]0;\dfrac{\pi}{2}\right[$

   OM_1AM_2 soit un carré pour $\theta = \dfrac{\pi}{4}$.

Exercice 2

1. a) Le triangle OAB soit équilatéral direct $\Leftrightarrow \begin{cases} OA = OB \\ \left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |a| = |b| \\ arg\left(\frac{b}{a}\right) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} \left|\frac{b}{a}\right| = 1 \\ arg\left(\frac{b}{a}\right) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi] \end{cases}.$$

On voit donc que le complexe $\frac{b}{a}$ a pour module 1 et pour argument $\frac{\pi}{3}$ on peut donc écrire $\frac{b}{a} = 1 \times e^{i\frac{\pi}{3}} = e^{i\frac{\pi}{3}}$

ou encore $b = ae^{i\frac{\pi}{3}} = \left(5 - i\sqrt{3}\right)\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{5}{2} + \frac{3}{2} + i\left(\frac{5\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 4 + 2i\sqrt{3}$.

L'affixe de B est $4 + 2i\sqrt{3}$.

Q est le milieu de $[OB]$ donc $z_Q = \frac{z_B + z_O}{2} = 2 + i\sqrt{3}$.

b) $ABQK$ soit un parallélogramme signifie A,B et Q non alignés et $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{KQ}$.

Or OAB triangle et Q le milieu de $[OB]$ donc A,B et Q non alignés et $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{KQ} \Leftrightarrow z_B - z_A = z_Q - z_K$.

On obtient $z_K = 3 - 2i\sqrt{3}$.

c) $\frac{z_K - a}{z_K} = \frac{3 - 2i\sqrt{3} - 5 + i\sqrt{3}}{3 - 2i\sqrt{3}} = \frac{-2 - i\sqrt{3}}{3 - 2i\sqrt{3}} = \frac{\left(-2 - i\sqrt{3}\right)\left(3 + 2i\sqrt{3}\right)}{9 + 12} = -3i\sqrt{3}$

On vient de prouver que $\frac{z_{\overrightarrow{AK}}}{z_{\overrightarrow{OK}}}$ est un imaginaire pur donc les vecteurs $\overrightarrow{AK}$ et $\overrightarrow{OK}$ sont orthogonaux.

Et comme $\left|\frac{z_K - a}{z_K}\right| = \left|-3i\sqrt{3}\right| = 3\sqrt{3} \neq 1$ alors $KA \neq KO$ et par suite le triangle AKO est rectangle en K non isocèle.

Nature du quadrilatère $OQAK$.

$z_{\overrightarrow{OQ}} = z_Q$ et $z_{\overrightarrow{KA}} = z_A - z_K = 5 - i\sqrt{3} - 3 + 2i\sqrt{3} = 2 + i\sqrt{3} = z_Q$ donc $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{KA}$ et par suite $OQAK$ est un parallélogramme de plus le triangle AKO est rectangle en K donc $OQAK$ est un rectangle non carré.

2. a) $\frac{z_K - b}{z_K - c} = \frac{3 - 2i\sqrt{3} - 4 - 2i\sqrt{3}}{3 - 2i\sqrt{3} - \frac{2}{3}\left(5 - i\sqrt{3}\right)} = \frac{-1 - 4i\sqrt{3}}{-\frac{1}{3} - 4i\frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{-1 - 4i\sqrt{3}}{\frac{1}{3}\left(-1 - 4i\sqrt{3}\right)} = 3$.

On vient de voir que le rapport $\frac{z_{\overrightarrow{BK}}}{z_{\overrightarrow{CK}}}$ est réel donc les vecteurs $\overrightarrow{BK}$ et $\overrightarrow{CK}$ sont colinéaires et par suite les points B, C et K sont alignés.

b) pour le point C.

On a :

$c = \frac{2a}{3} \Leftrightarrow \overrightarrow{OC} = \frac{2}{3}\overrightarrow{OA}$ et donc C est un point de la droite (OA).

B, C et K sont alignés donc C est un point de la droite (BK).

D'où la construction de C comme point d'intersection de deux droites.

Exercice 3

1. a) $z_A = 1+ia = 1+i(a_1+ia_2) = 1-a_2+ia_1$ et donc $A(1-a_2, a_1)$

   $z_B = 1-ia = 1-i(a_1+ia_2) = 1+a_2-ia_1$ et donc $B(1+a_2, -a_1)$.

   O, A et B sont alignés signifie $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ colinéaires et donc

   $det(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = 0 \Leftrightarrow (1-a_2)(-a_1)-(1+a_2)(a_1) = 0 \Leftrightarrow -2a_1 = 0 \Leftrightarrow a_1 = 0$ c'est le résultat demandé.

   b) $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OB} \Leftrightarrow \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = 0 \Leftrightarrow (1-a_2)(1+a_2)-a_1^2 = 0 \Leftrightarrow 1-(a_1^2+a_2^2) = 0 \Leftrightarrow 1-|a|^2 = 0 \Leftrightarrow |a| = 1$ c'est le résultat demandé.

2. a)On suppose que $a = e^{i\alpha}$ où $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

   $z_A = 1+ia = 1+ie^{i\alpha} = 1+e^{i\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)} = e^{i\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}\left(e^{-i\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}+e^{i\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}\right) = e^{i\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4}\right)} \times 2cos\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$ il s'agit d'une écriture exponentielle car $-\frac{\pi}{2} \prec \alpha \prec \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow -\frac{\pi}{4} \prec \frac{\alpha}{2} \prec \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow 0 \prec \frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4} \prec \frac{\pi}{2}$ et donc $cos\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4}\right) \succ 0$

   $z_A = 1-ia = 1-ie^{i\alpha} = 1+e^{i\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)} = e^{i\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}\left(e^{-i\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}+e^{i\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}\right) = e^{i\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{4}\right)} \times 2cos\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{4}\right)$ et $-\frac{\pi}{2} \prec \frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{4} \prec 0$ donc $cos\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{4}\right) \succ 0$ il s'agit aussi d'une écriture exponentielle.

   b) D'après 1. $|a| = 1$ donc $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OB}$ donc il suffit de déterminer a de sorte que $OA = OB$.

   Mais $OA = OB \Leftrightarrow |z_A| = |z_B| \Leftrightarrow 2cos\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4}\right) = 2cos\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow cos\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4}\right) = cos\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{4}\right)$

   $$\begin{cases} \frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4} = \frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{4}+2k\pi \\ \frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4} = -\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4}+2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4} = \frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{4}+2k\pi \\ \frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4} = -\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4}+2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

   La première équation étant impossible, on obtient $\alpha = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ et $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

   La seule valeur qui convient est $\alpha = 0$ et donc $a = 1$.

Exercice 4

1. Remarquons que $z = z^2 \Leftrightarrow z(1-z) = 0 \Leftrightarrow z = 0 \; ou \; z = 1$ et

   $z = z^3 \Leftrightarrow z(1-z^2) = 0 \Leftrightarrow z = 0 \; ou \; z = 1 \; ou \; z = -1$ et que $z^2 = z^3 \Leftrightarrow z^2(1-z) = 0 \Leftrightarrow z = 0 \; ou \; z = 1$ et comme z est un nombre complexe non nul différent de (-1) et de 1 alors les points M, N et P sont deux à deux distincts.

a) Le triangle MNP est rectangle en P si et seulement si, $\frac{z_{\overrightarrow{PM}}}{z_{\overrightarrow{PN}}}$ est imaginaire pur si et seulement si,

$\frac{z-z^3}{z^2-z^3}$ est imaginaire pur si et seulement si, $\frac{z(1-z^2)}{z^2(1-z)}$ est imaginaire pur si et seulement si, $\frac{1+z}{z}$ est imaginaire pur.

b) $z=x+iy$ où x et y sont des réels.

$\frac{1+z}{z}=\frac{1+x+iy}{x+iy}=\frac{(1+x+iy)(x-iy)}{x^2+y^2}=\frac{x^2+y^2+x-iy}{x^2+y^2}$

Soit M un point d'affixe z où z est un nombre complexe non nul différent de (-1) et de 1.

Le triangle MNP est rectangle en P si et seulement si, $x^2+y^2+x=0 \Leftrightarrow \left(x+\frac{1}{2}\right)^2+y^2=\frac{1}{4}$.

Il s'agit de l'équation d'un cercle de centre $\omega\left(-\frac{1}{2},0\right)$ et de rayon $\frac{1}{2}$ qui n'est autre que le cercle (Γ) de diamètre $[OA]$.

Et comme M est distinct de O et de A alors l'ensemble des points M tels que le triangle MNP soit un triangle rectangle en P est le cercle (Γ) de diamètre $[OA]$, privé des points O et A.

2. a) z est non nul, $\left(\overrightarrow{OM},\overrightarrow{ON}\right)\equiv arg\left(\frac{z^2}{z}\right)[2\pi]$ donc $\left(\overrightarrow{OM},\overrightarrow{ON}\right)\equiv arg(z)[2\pi]$ soit encore

$\left(\overrightarrow{OM},\overrightarrow{ON}\right)\equiv\left(\vec{u},\overrightarrow{OM}\right)[2\pi]$.

Aussi $\left(\overrightarrow{ON},\overrightarrow{OP}\right)\equiv arg\left(\frac{z^3}{z^2}\right)[2\pi]$ donc $\left(\overrightarrow{ON},\overrightarrow{OP}\right)\equiv arg(z)[2\pi]$ soit encore $\left(\overrightarrow{ON},\overrightarrow{OP}\right)\equiv\left(\vec{u},\overrightarrow{OM}\right)[2\pi]$.

b) Dans le triangle rectangle OMH, rectangle en H, $cos\left(\widehat{MOH}\right)=\frac{OH}{OM}$ et aussi dans le triangle rectangle OMA, rectangle en M : $cos\left(\widehat{MOA}\right)=\frac{OM}{OA}$ et comme H est un point du segment $[OA]$ distinct de O et A car M est distinct de O et A donc $\widehat{MOA}=\widehat{MOH}$ et par suite $\frac{OH}{OM}=\frac{OM}{OA}\Leftrightarrow OM^2=OA\times OH$ c'est le résultat demandé.

c) $ON=|z|^2=OM^2=OH$ donc N est le point d'intersection de cercle de centre O et de rayon OH avec la demi-droite $[Ot)$ telle que $\left(\overrightarrow{OM},\overrightarrow{Ot}\right)\equiv\left(\vec{u},\overrightarrow{OM}\right)[2\pi]$

P est le point d'intersection du cercle de diamètre $[MN]$ avec la demi-droite image de $[OM)$ par la symétrie orthogonale d'axe (ON).