Exercice n°1 :

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E): Z^2 - 2(1+\cos 2\theta)Z + 2(1+\cos 2\theta) = 0,\ \theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

1. a. Résoudre l'équation (E).

   b. Donner l'écriture exponentielle de chacune des solutions.

2. Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, On désigne par A et B les points images des solutions de (E) et par C le point d'affixe 2.

   Déterminer θ pour que OACB soit un losange.

Exercice n°2 :

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$. On considère les points $A(2)$ et $B(3)$.

Soit Z un nombre complexe différent de 2 et $Z' = \dfrac{\overline{Z}-3}{\overline{Z}-2}$.

On désigne par M et M' les points d'affixes respectives Z et Z'.

1. a. Vérifier que $Z' - 1 = \dfrac{-1}{\overline{Z}-2}$

   b. En déduire que $IM' \times AM = 1$ et $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{IM'}) \equiv \pi[2\pi]$.

2. Construire le point M' lorsque M est un point du cercle $\mathcal{C}_1$ de centre A et de rayon 1.

3. Dans cette question, le point M appartient au cercle $\mathcal{C}_2$ de centre B et de rayon 1.

   a. Montrer qu'il existe un réel θ de $]-\pi, \pi[$ tel que $Z = 3 + e^{i\theta}$.

   b. Ecrire $Z' - 1$ sous forme exponentielle.

   c. Montrer que M' appartient à la droite $\Delta : x = \frac{1}{2}$.

   d. Construire alors le point M'.

Exercice n°3 :

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

I/ 1. Déterminer l'ensemble des points $M(Z)$ tel que $1 + Z^2$ est réel.

2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sqrt{1+x^2}$.

   On désigne par C_f la courbe représentative de f dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

   Montrer que pour tout $Z \in \mathbb{C}$,

$1+Z^2$ est imaginaire, si et seulement si, $M(Z)\in C_f$ ou $M(Z)\in S_{(O,\vec{u})}(C_f)$.

II/ Pour tout $Z\in\mathbb{C}$, on désigne par M, N et P les points d'affixes respectives Z, Z^3 et Z^5.

1. Déterminer l'ensemble des points $M(Z)$ pour que M, N et P soient alignés.

2. Déterminer l'ensemble des points $M(Z)$ pour que MNP soit un triangle rectangle en M.

3. Dans l'annexe (II) ci-jointe, on a représenté la courbe C_f de f.

Construire trois points $M(Z)$, $N(Z^3)$ et $P(Z^5)$ tels que $\begin{cases}|Z|=\sqrt{2} \text{ et} \\ \text{le triangle MNP est rectangle en M}\end{cases}$

Exercice n°4 :

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E):(Z-i)^6=(Z-3i)^6$.

On désigne par A et B les points d'affixes respectives i et 3i.

1. a. Montrer que si Z est une solution de l'équation (E) alors le point M d'affixe Z appartient

à la médiatrice du segment $[AB]$.

b. En déduire que toute solution de l'équation (E) s'écrit de la forme $Z=x+2i$, $x\in\mathbb{R}$.

c. Montrer que si Z est une solution de l'équation (E) alors $\arg(Z-i)+\arg(Z-3i)\equiv 0[2\pi]$.

2. Montrer que si Z est une solution de l'équation (E) alors $12\arg(Z-i)\equiv 0[2\pi]$.

3. Construire les points images de toutes les solutions de l'équation (E).

Exercice n°5 :

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives $a=2$, $b=-1+i\sqrt{3}$ et $c=-1-i\sqrt{3}$.

1°/ Placer les points A, B et C.

2°/ Extérieurement au triangle ABC, on construit les points B' et C' tels que ABB' et ACC' sont deux triangles

rectangles et isocèles en A.

On désigne par b' et c' les affixes respectives des points B' et C'.

a) Montrer que $\dfrac{b'-a}{b-a}=-i$. En déduire la forme algébrique de b'.

b) Montrer que b' et c' sont conjugués.

3°/ On désigne par M, N, P et Q les milieux respectifs des segments $[CB]$, $[BB']$, $[B'C']$ et $[C'C]$.

On note m, n, p et q les affixes respectives des points M, N, P et Q.

a) Vérifier que $n+1=i(q+1)$. En déduire la nature du triangle MNQ.

b) Montrer que le quadrilatère MNPQ est un carré.

Exercice n°3