

Lycée pilote de Tunis 	<b>Nombres complexes 2</b>	Terminale maths & S-exp
Mr Ben Regaya. A	+ <i>Éléments de corrections</i>	<a href="http://www.ben-regaya.net">www.ben-regaya.net</a>

### Exercice 1

On considère les nombres complexes  $z_1 = -\cos\theta e^{i\theta}$  et  $z_2 = i \sin\theta e^{i\theta}$  où  $\theta \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ . On désigne par  $M_1$  et  $M_2$  les points images de  $z_1$  et  $z_2$ .

On pose  $I$  le milieu de  $[M_1M_2]$ ;

1. Déterminer l'affixe  $z_I$  du point  $I$ .
2. a) Ecrire le complexe  $z_1 - z_2$  sous forme exponentielle.  
b) Montrer que  $OM_1^2 + OM_2^2 = M_1M_2^2$ . Conclure.
3. Montrer que  $\left|z_1 + \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$  et déterminer l'ensemble  $C_1$  sur lequel varie le point  $M_1$ . En déduire l'ensemble sur lequel varie le point  $M_2$ .
4. Soit  $A$  le point d'affixe  $-1$ .  
a) Montrer que  $OM_1AM_2$  est un rectangle.  
b) Déterminer le réel  $\theta$  pour que  $OM_1AM_2$  soit un carré.

### Exercice 2

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé direct  $(O; \vec{u}, \vec{v})$  (unité graphique : 2 cm), on considère :

- le point  $A$  d'affixe  $a = 5 - i\sqrt{3}$  ;
  - le point  $B$  tel que le triangle  $OAB$  soit équilatéral direct, c'est-à-dire avec  $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \frac{\pi}{3} [2\pi]$  ;
  - le milieu  $Q$  de  $[OB]$ .
1. a) Démontrer que  $B$  a pour affixe  $b = 4 + 2i\sqrt{3}$ . En déduire l'affixe  $q$  de  $Q$ .  
b) Déterminer l'affixe  $z_K$  du point  $K$  tel que  $ABQK$  soit un parallélogramme.  
c) Démontrer que  $\frac{z_K - a}{z_K}$  est imaginaire pur. Qu'en déduit-on pour le triangle  $OKA$  ?

Préciser la nature du quadrilatère  $OQAK$ .

d) Placer les points  $A, B, Q$  et  $K$  dans le plan.

2. Soit  $C$  le point d'affixe  $c = \frac{2a}{3}$ .

a) Calculer  $\frac{z_K - b}{z_K - c}$ . Que peut-on en déduire pour les points  $B, C$  et  $K$  ?

b) Placer  $C$  sur la figure.



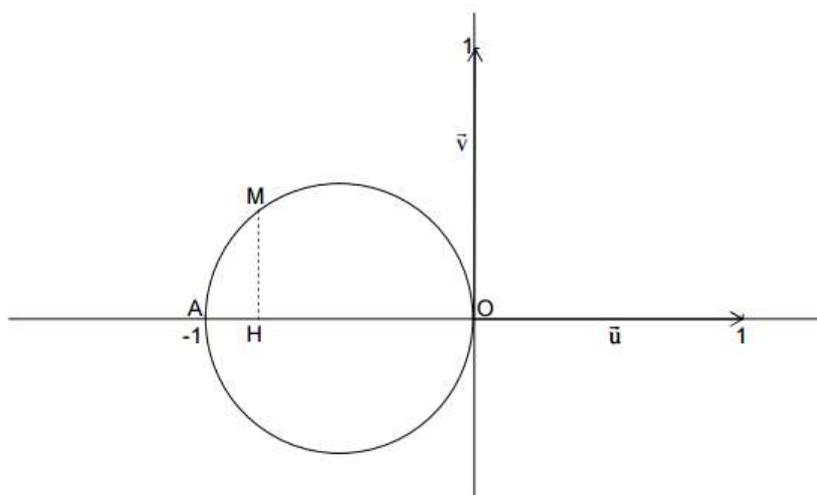
### Exercice 3

- Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct  $(O; \vec{u}; \vec{v})$ , on considère les points  $A(1+ia)$  et  $B(1-ia)$  où  $a$  est un complexe. On pose  $a = a_1 + ia_2$  ;  $a_1$  et  $a_2$  réels.
  - Montrer que les points  $O, A$  et  $B$  sont alignés si et seulement si,  $a_1 = 0$ .
  - Montrer que  $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OB} \Leftrightarrow |a| = 1$ .
- On suppose que  $a$  est le complexe de module 1 et d'argument  $\alpha$  où  $\alpha \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$ .
  - Donner une écriture exponentielle des affixes des points  $A$  et  $B$ .
  - Déterminer  $a$  pour que les points  $O, A$  et  $B$  forment un triangle isocèle rectangle en  $O$ .

### Exercice 4

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ , on considère le point  $A$  d'affixe  $(-1)$  et les points  $M, N$  et  $P$  d'affixes respectives  $z, z^2$  et  $z^3$  où  $z$  est un nombre complexe non nul différent de  $(-1)$  et de  $1$ .

- Montrer que : (le triangle  $MNP$  est rectangle en  $P$ ) si et seulement si  $\left( \frac{1+z}{z} \right)$  est imaginaire pur .
  - En déduire que l'ensemble des points  $M$  tels que le triangle  $MNP$  soit un triangle rectangle en  $P$  est le cercle  $(\Gamma)$  de diamètre  $[OA]$ , privé des points  $O$  et  $A$ .
- Dans la figure ci-dessous, on a tracé le cercle  $(\Gamma)$  et on a placé un point  $M$  d'affixe  $z$  sur  $(\Gamma)$  et son projeté orthogonal  $H$  sur l'axe  $(O, \vec{u})$ . On se propose de construire les points  $N$  et  $P$  d'affixes respectives  $z^2$  et  $z^3$  tels que le triangle  $MNP$  soit rectangle en  $P$ .
  - Montrer que  $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}) \equiv (\vec{u}, \overrightarrow{OM}) [2\pi]$  puis que  $(\overrightarrow{ON}, \overrightarrow{OP}) \equiv (\vec{u}, \overrightarrow{OM}) [2\pi]$ .
  - Montrer que  $OH = OM^2$ .
  - Donner un procédé de construction des points  $N$  et  $P$  puis les construire.



Lycée pilote de Tunis 	<b>Nombres complexes</b>	<i>Terminale maths &amp; S-exp</i>
Mr Ben Regaya. A	<i>Éléments de corrections</i>	www.ben-regaya.net

**Exercice1**

$$1. z_I = \frac{z_{M_1} + z_{M_2}}{2} = \frac{-\cos\theta e^{i\theta} + i\sin\theta e^{i\theta}}{2} = \frac{-e^{i\theta}(\cos\theta - i\sin\theta)}{2} = \frac{e^{i(\theta+\pi)} e^{-i\theta}}{2} = \frac{e^{i\pi}}{2} = -\frac{1}{2}.$$

$$2. a) z_1 - z_2 = -\cos\theta e^{i\theta} - i\sin\theta e^{i\theta} = -e^{i\theta}(\cos\theta + i\sin\theta) = e^{i(\theta+\pi)} e^{i\theta} = e^{i(2\theta+\pi)}.$$

$$b) OM_1^2 = |z_1|^2 = |-\cos\theta e^{i\theta}|^2 = |-\cos\theta|^2 |e^{i\theta}|^2 = |\cos\theta|^2 = \cos^2\theta$$

$$OM_2^2 = |z_2|^2 = |i\sin\theta e^{i\theta}|^2 = |i|^2 |\sin\theta|^2 |e^{i\theta}|^2 = |\sin\theta|^2 = \sin^2\theta$$

$$M_1 M_2^2 = |z_2 - z_1|^2 = |z_1 - z_2|^2 = |e^{i(2\theta+\pi)}|^2 = 1.$$

Or  $OM_1^2 + OM_2^2 = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$  ainsi  $OM_1^2 + OM_2^2 = M_1 M_2^2$ . Le triangle  $OM_1 M_2$  est rectangle en  $O$ .

$$3. \left| z_1 + \frac{1}{2} \right| = \left| -\cos\theta e^{i\theta} + \frac{1}{2} \right| = \left| \cos\theta e^{i\theta} - \frac{1}{2} \right| = \left| \left( \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \right) e^{i\theta} - \frac{1}{2} \right| = \left| \frac{1}{2} e^{2i\theta} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right| = \left| \frac{1}{2} e^{2i\theta} \right| = \frac{1}{2}.$$

$$\text{On a donc } \left| z_1 + \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left| z_1 - \left( -\frac{1}{2} \right) \right| = \frac{1}{2} \Leftrightarrow IM_1 = \frac{1}{2}.$$

Le point  $M_1$  varie sur le cercle de centre  $I$  et de rayon  $\frac{1}{2}$ .

$I$  étant le milieu de  $[M_1 M_2]$  donc  $M_2 = S_I(M_1)$  et par suite le point  $M_2$  varie sur le même cercle.

$$4. a) z_{\overline{OM_1}} = z_1 \text{ et } z_{\overline{M_2 A}} = z_A - z_{M_2} = -1 - i\sin\theta e^{i\theta} = -1 - i \left( \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \right) e^{i\theta} = -1 - \left( \frac{e^{2i\theta}}{2} - \frac{1}{2} \right) = -\frac{1}{2} - \frac{e^{2i\theta}}{2}.$$

$$= -\frac{1}{2}(e^{2i\theta} + 1) = -\frac{1}{2}(e^{i\theta}(e^{i\theta} + e^{-i\theta})) = -\frac{1}{2}e^{i\theta} \times 2\cos\theta = -e^{i\theta} \times \cos\theta = z_1.$$

On a donc  $z_{\overline{OM_1}} = z_{\overline{M_2 A}} \Leftrightarrow \overrightarrow{OM_1} = \overrightarrow{M_2 A}$  et par suite  $OM_1 AM_2$  est un parallélogramme.

D'autre part  $\theta \in \left] 0; \frac{\pi}{2} \right[$  donc  $\sin\theta \neq 0$  et par suite  $z_2 \neq 0$ .

$$\frac{z_{\overline{OM_1}}}{z_{\overline{OM_2}}} = \frac{-\cos\theta e^{i\theta}}{i\sin\theta e^{i\theta}} = i \frac{\cos\theta}{\sin\theta} \text{ qui est un complexe imaginaire pur donc } \overrightarrow{OM_1} \perp \overrightarrow{OM_2} \text{ et le quadrilatère}$$

$OM_1 AM_2$  est un rectangle.

b) Pour que  $OM_1 AM_2$  soit un carré il suffit d'avoir  $OM_1 = OM_2$ .

$$\text{Mais } OM_1 = OM_2 \Leftrightarrow \cos\theta = \sin\theta \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{4} \text{ car } \theta \in \left] 0; \frac{\pi}{2} \right[$$

$OM_1 AM_2$  soit un carré pour  $\theta = \frac{\pi}{4}$ .



Exercice 2

$$1. \text{ a) Le triangle } OAB \text{ soit équilatéral direct} \Leftrightarrow \begin{cases} OA = OB \\ (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |a| = |b| \\ \arg\left(\frac{b}{a}\right) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \left|\frac{b}{a}\right| = 1 \\ \arg\left(\frac{b}{a}\right) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi] \end{cases}$$

On voit donc que le complexe  $\frac{b}{a}$  a pour module 1 et pour argument  $\frac{\pi}{3}$  on peut donc écrire  $\frac{b}{a} = 1 \times e^{i\frac{\pi}{3}} = e^{i\frac{\pi}{3}}$

$$\text{ou encore } b = ae^{i\frac{\pi}{3}} = (5 - i\sqrt{3}) \left( \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{5}{2} + \frac{3}{2} + i \left( \frac{5\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 4 + 2i\sqrt{3}.$$

L'affixe de  $B$  est  $4 + 2i\sqrt{3}$ .

$Q$  est le milieu de  $[OB]$  donc  $z_Q = \frac{z_B + z_O}{2} = 2 + i\sqrt{3}$ .

b)  $ABQK$  soit un parallélogramme signifie  $A, B$  et  $Q$  non alignés et  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{KQ}$ .

Or  $OAB$  triangle et  $Q$  le milieu de  $[OB]$  donc  $A, B$  et  $Q$  non alignés et  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{KQ} \Leftrightarrow z_B - z_A = z_Q - z_K$ .

On obtient  $z_K = 3 - 2i\sqrt{3}$ .

$$c) \frac{z_K - a}{z_K} = \frac{3 - 2i\sqrt{3} - 5 + i\sqrt{3}}{3 - 2i\sqrt{3}} = \frac{-2 - i\sqrt{3}}{3 - 2i\sqrt{3}} = \frac{(-2 - i\sqrt{3})(3 + 2i\sqrt{3})}{9 + 12} = -3i\sqrt{3}$$

On vient de prouver que  $\frac{z_{AK}}{z_{OK}}$  est un imaginaire pur donc les vecteurs  $\overrightarrow{AK}$  et  $\overrightarrow{OK}$  sont orthogonaux.

Et comme  $\left| \frac{z_K - a}{z_K} \right| = |-3i\sqrt{3}| = 3\sqrt{3} \neq 1$  alors  $KA \neq KO$  et par suite le triangle  $AKO$  est rectangle en  $K$  non

isocèle.

Nature du quadrilatère  $OQAK$ .

$z_{OQ} = z_Q$  et  $z_{KA} = z_A - z_K = 5 - i\sqrt{3} - 3 + 2i\sqrt{3} = 2 + i\sqrt{3} = z_Q$  donc  $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{KA}$  et par suite  $OQAK$  est un parallélogramme de plus le triangle  $AKO$  est rectangle en  $K$  donc  $OQAK$  est un rectangle non carré.

$$2. \text{ a) } \frac{z_K - b}{z_K - c} = \frac{3 - 2i\sqrt{3} - 4 - 2i\sqrt{3}}{3 - 2i\sqrt{3} - \frac{2}{3}(5 - i\sqrt{3})} = \frac{-1 - 4i\sqrt{3}}{-\frac{1}{3} - 4i\frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{-1 - 4i\sqrt{3}}{\frac{1}{3}(-1 - 4i\sqrt{3})} = 3.$$

On vient de voir que le rapport  $\frac{z_{BK}}{z_{CK}}$  est réel donc les vecteurs  $\overrightarrow{BK}$  et  $\overrightarrow{CK}$  sont colinéaires et par suite les points

$B, C$  et  $K$  sont alignés.

b) pour le point  $C$ .

On a :

$$c = \frac{2a}{3} \Leftrightarrow \overrightarrow{OC} = \frac{2}{3}\overrightarrow{OA} \text{ et donc } C \text{ est un point de la droite } (OA).$$



$B$ ,  $C$  et  $K$  sont alignés donc  $C$  est un point de la droite  $(BK)$ .

D'où la construction de  $C$  comme point d'intersection de deux droites.

### Exercice 3

1. a)  $z_A = 1 + ia = 1 + i(a_1 + ia_2) = 1 - a_2 + ia_1$  et donc  $A(1 - a_2, a_1)$

$z_B = 1 - ia = 1 - i(a_1 + ia_2) = 1 + a_2 - ia_1$  et donc  $B(1 + a_2, -a_1)$ .

$O$ ,  $A$  et  $B$  sont alignés signifie  $\overrightarrow{OA}$  et  $\overrightarrow{OB}$  colinéaires et donc

$$\det(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = 0 \Leftrightarrow (1 - a_2)(-a_1) - (1 + a_2)(a_1) = 0 \Leftrightarrow -2a_1 = 0 \Leftrightarrow a_1 = 0 \text{ c'est le résultat demandé.}$$

b)  $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OB} \Leftrightarrow \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0 \Leftrightarrow (1 - a_2)(1 + a_2) - a_1^2 = 0 \Leftrightarrow 1 - (a_1^2 + a_2^2) = 0 \Leftrightarrow 1 - |a|^2 = 0 \Leftrightarrow |a| = 1$  c'est le résultat demandé.

2. a) On suppose que  $a = e^{i\alpha}$  où  $\alpha \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$ .

$$z_A = 1 + ia = 1 + ie^{i\alpha} = 1 + e^{i\left(\frac{\alpha + \pi}{2}\right)} = e^{i\left(\frac{\alpha + \pi}{4}\right)} \left( e^{-i\left(\frac{\alpha + \pi}{4}\right)} + e^{i\left(\frac{\alpha + \pi}{4}\right)} \right) = e^{i\left(\frac{\alpha + \pi}{4}\right)} \times 2\cos\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$$
 il s'agit d'une

écriture exponentielle car  $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow -\frac{\pi}{4} < \frac{\alpha}{2} < \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow 0 < \frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2}$  et donc  $\cos\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}\right) > 0$

$$z_B = 1 - ia = 1 - ie^{i\alpha} = 1 + e^{i\left(\frac{\alpha - \pi}{2}\right)} = e^{i\left(\frac{\alpha - \pi}{4}\right)} \left( e^{-i\left(\frac{\alpha - \pi}{4}\right)} + e^{i\left(\frac{\alpha - \pi}{4}\right)} \right) = e^{i\left(\frac{\alpha - \pi}{4}\right)} \times 2\cos\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$$
 et

$-\frac{\pi}{2} < \frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4} < 0$  donc  $\cos\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4}\right) > 0$  il s'agit aussi d'une écriture exponentielle.

b) D'après 1.  $|a| = 1$  donc  $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OB}$  donc il suffit de déterminer  $a$  de sorte que  $OA = OB$ .

$$\text{Mais } OA = OB \Leftrightarrow |z_A| = |z_B| \Leftrightarrow 2\cos\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = 2\cos\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\begin{cases} \frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4} = \frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ \frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4} = -\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4} = \frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ \frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4} = -\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

La première équation étant impossible, on obtient  $\alpha = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$  et  $\alpha \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$ .

La seule valeur qui convient est  $\alpha = 0$  et donc  $a = 1$ .

### Exercice 4

1. Remarquons que  $z = z^2 \Leftrightarrow z(1 - z) = 0 \Leftrightarrow z = 0$  ou  $z = 1$  et

$z = z^3 \Leftrightarrow z(1 - z^2) = 0 \Leftrightarrow z = 0$  ou  $z = 1$  ou  $z = -1$  et que  $z^2 = z^3 \Leftrightarrow z^2(1 - z) = 0 \Leftrightarrow z = 0$  ou  $z = 1$  et

comme  $z$  est un nombre complexe non nul différent de  $(-1)$  et de  $1$  alors les points  $M$ ,  $N$  et  $P$  sont deux à deux distincts.



a) Le triangle  $MNP$  est rectangle en  $P$  si et seulement si,  $\frac{z_{PM}}{z_{PN}}$  est imaginaire pur si et seulement si,

$$\frac{z - z^3}{z^2 - z^3} \text{ est imaginaire pur si et seulement si, } \frac{z(1 - z^2)}{z^2(1 - z)} \text{ est imaginaire pur si et seulement si, } \frac{1 + z}{z} \text{ est}$$

imaginaire pur.

b)  $z = x + iy$  où  $x$  et  $y$  sont des réels.

$$\frac{1 + z}{z} = \frac{1 + x + iy}{x + iy} = \frac{(1 + x + iy)(x - iy)}{x^2 + y^2} = \frac{x^2 + y^2 + x - iy}{x^2 + y^2}$$

Soit  $M$  un point d'affixe  $z$  où  $z$  est un nombre complexe non nul différent de  $(-1)$  et de  $1$ .

Le triangle  $MNP$  est rectangle en  $P$  si et seulement si,  $x^2 + y^2 + x = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4}$ .

Il s'agit de l'équation d'un cercle de centre  $\omega\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$  et de rayon  $\frac{1}{2}$  qui n'est autre que le cercle  $(\Gamma)$  de diamètre  $[OA]$ .

Et comme  $M$  est distinct de  $O$  et de  $A$  alors l'ensemble des points  $M$  tels que le triangle  $MNP$  soit un triangle rectangle en  $P$  est le cercle  $(\Gamma)$  de diamètre  $[OA]$ , privé des points  $O$  et  $A$ .

2. a)  $z$  est non nul,  $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}) \equiv \arg\left(\frac{z^2}{z}\right)[2\pi]$  donc  $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}) \equiv \arg(z)[2\pi]$  soit encore

$$(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}) \equiv (\vec{u}, \overrightarrow{OM})[2\pi].$$

Aussi  $(\overrightarrow{ON}, \overrightarrow{OP}) \equiv \arg\left(\frac{z^3}{z^2}\right)[2\pi]$  donc  $(\overrightarrow{ON}, \overrightarrow{OP}) \equiv \arg(z)[2\pi]$  soit encore  $(\overrightarrow{ON}, \overrightarrow{OP}) \equiv (\vec{u}, \overrightarrow{OM})[2\pi]$ .

b) Dans le triangle rectangle  $OMH$ , rectangle en  $H$ ,  $\cos(MOH) = \frac{OH}{OM}$  et aussi dans le triangle rectangle

$OMA$ , rectangle en  $M$  :  $\cos(MOA) = \frac{OM}{OA}$  et comme  $H$  est un point du segment  $[OA]$  distinct de  $O$  et  $A$  car

$M$  est distinct de  $O$  et  $A$  donc  $MOA = MOH$  et par suite  $\frac{OH}{OM} = \frac{OM}{OA} \Leftrightarrow OM^2 = OA \times OH$  c'est le résultat demandé.

c)  $ON = |z|^2 = OM^2 = OH$  donc  $N$  est le point d'intersection de cercle de centre  $O$  et de rayon  $OH$  avec la demi-droite  $[Ot)$  telle que  $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{Ot}) \equiv (\vec{u}, \overrightarrow{OM})[2\pi]$

$P$  est le point d'intersection du cercle de diamètre  $[MN]$  avec la demi-droite image de  $[OM)$  par la symétrie orthogonale d'axe  $(ON)$ .

