Lycée pilote de Tunis	**Nombres Complexes 5**	*Terminales Maths*
Mr Ben Regaya. A	**+Eléments de Corrections**	*www.ben-regaya.net*

Exercice1

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$. On donne le point $M\left(z=cos\theta\, e^{i\frac{\pi}{4}}\right)$ avec $\theta\in\left[0,\pi\right]$.

1. a) Mettre z sous forme exponentielle. (Discuter suivant θ).
   b) Déterminer l'ensemble des points M quand θ décrit $\left[0,\pi\right]$.
2. Soit l'équation (E) : $z^2-2cos\theta e^{i\frac{\pi}{4}}z+i=0$.
   a) Déterminer θ pour que (E) admette deux solutions opposées.
   b) Montrer que $\left(sin\,\theta\, e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)^2=-isin^2\theta$
   c) Résoudre (E) et donner la forme exponentielle des solutions. Retrouver 2. a).
3. Soient M' et M'' les points d'affixes respectives $z'=e^{i\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)}$ et $z''=e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)}$.
   a) Montrer que M est le milieu du segment $\left[M'M''\right]$.
   b) Montrer que lorsque $\theta\neq\frac{\pi}{2}$ on a : $\frac{z''-z'}{z}=2i\,tan\theta$.
   c) Déduire que pour tout réel $\theta\in\left[0,\pi\right]$; $\overrightarrow{OM}\perp\overrightarrow{M'M''}$.

Exercice 2

Soient a et b deux complexes tels que $a\bar{b}\neq1$, on pose alors $z=\frac{a-b}{1-a\bar{b}}$. Montrer que $|z|=1\Leftrightarrow|a|=1\ ou\ |b|=1$

Exercice3

1. a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2-z+1=0$. Mettre les solutions sous forme trigonométrique.
   b) Déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^4-z^2+1=0$.
2. Soit a un réel de l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2-\left(2cosa\right)z+1=0$.
3. Pour tout complexe z, on pose $f(z)=z^3-\left(i+2cosa\right)z^2+\left(1+2icosa\right)z-i$.
   Calculer $f(i)$ puis résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $f(z)=0$.
4. Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$. On considère les points A, M et N d'affixes respectives i , e^{ia} et $i+e^{ia}$.
   a) Montrer que le quadrilatère $OANM$ est un losange.
   b) Déterminer les réels a pour que la mesure de l'aire du losange $OANM$ soit égale à $\frac{1}{2}$.
   c) Mettre l'affixe du point N sous forme exponentielle.
   d) Déterminer et construire l'ensemble des points N lorsque a décrit l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$.

Exercice4

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$. Soit $j=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

1. Calculer les complexes j^2, j^3 et $1+j$ sous leur forme algébrique et sous leur forme exponentielle.
2. Soit a,b,c sont trois complexes tels que l'on ait $a+bj+cj^2=0$. Démontrer les égalités $|a-b|=|b-c|=|c-a|$
3. Soit $A(2+4i)$. Construire un triangle équilatéral ABC dont le sommet B et sur l'axe des réels et le sommet C sur l'axe des imaginaires.

Exercice5

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2+i(e^{i\theta}-2)z+e^{i\theta}-1=0$.
2. Le plan complexe étant muni d'un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$.Déterminer et construire l'ensemble des points $H(i-ie^{i\theta})$ lorsque θ varie dans $]\frac{\pi}{2},\pi[$.
3. Soit $A(1)$, $B(i)$ et on note f l'application qui a tout point M d'affixe $z\neq i$ associe le point $M'(z')$ tel que $z'=\frac{\overline{z}-i}{\overline{z}+i}$.

   a) Montrer que $\overrightarrow{AM'}$ et $\overrightarrow{BM}$ sont orthogonaux.

   b) Montrer que si M est un point du cercle trigonométrique privé de B alors M' appartient à l'axe des ordonnées. Construire alors M' connaissant M.
4. a) Soit $\alpha\in\left]0,2\pi\right[$. Déterminer le complexe z tel que $\frac{z+i}{z-i}=e^{-i\alpha}$.

   b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $\left(\overline{z}-i\right)^3=\frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i)\left(\overline{z}+i\right)^3$.

Exercice6

Le plan complexe rapporté au repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$.Soit α un réel de $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ et A le point d'affixe 1.

1. a)Vérifier que $e^{4i\alpha}=1+2i\,sin2\alpha\,e^{2i\alpha}$.

   b) Résoudre alors dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2+z-\frac{1}{2}i\,sin2\alpha\,e^{2i\alpha}=0$. Mettre les solutions sous forme exponentielle.
2. On donne les points $H\left(-cos\alpha\,e^{i\alpha}\right)$ et $K\left(i\,sin\alpha\,e^{i\alpha}\right)$.

   a) Calculer HK. En déduire que $[HK]$ est un diamètre d'un cercle fixe.

   b) Montrer que OHK est rectangle puis déterminer α pour qu'il soit isocèle.
3. Soit f l'application qui a tout point M d'affixe non nul z associe le point $M'(z')$ tel que $z'=\frac{\overline{z}-1}{\overline{z}}$.

   a) Montrer que f n'admet pas de point invariant.

   b) Déterminer les affixes des points $H'=f(H)$ et $K'=f(K)$.

   c) Déterminer l'ensemble des points I milieu de $\left[H'K'\right]$ quand α varie.
4. a) Montrer que $\overrightarrow{AM'}$ et $\overrightarrow{OM}$ sont colinéaires.

   b) Montrer que si M est distinct de A alors $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OM'}\right)\equiv\left(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{OM}\right)[2\pi]$.

   c) Donner une construction du point M' lorsque M appartient au cercle de diamètre $[OA]$ privé de O et A

Exercice1

1. a) Si $\theta \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ alors $cos\theta \succ 0$ et $z = cos\theta\, e^{i\frac{\pi}{4}}$ c'est une forme exponentielle

Si $\theta \in \left]\frac{\pi}{2},\pi\right]$ alors $cos\theta \prec 0$ et $z = (-cos\theta)e^{i\frac{\pi}{4}} \times (-1) = (-cos\theta)e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\pi\right)} = (-cos\theta)e^{i\left(-\frac{3\pi}{4}\right)}$ c'est une forme exponentielle

Si $\theta = \frac{\pi}{2}$ alors $z = 0$ et dans ce cas pas de forme exponentielle.

b) Ensemble des points M quand θ décrit $[0,\pi]$.

On a : $z = cos\theta\, e^{i\frac{\pi}{4}} = cos\theta\left(cos\frac{\pi}{4} + isin\frac{\pi}{4}\right) = cos\theta\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

Donc si on pose $z = x + iy$, x et y réels , on aura : $\begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2}cos\theta \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}sin\theta \end{cases}$ et donc on voit que $y = x$ il s'agit donc d'une droite , mais le fait que $\theta \in [0,\pi]$, $x = \frac{\sqrt{2}}{2}cos\theta \in \left[-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ donc l' ensemble des points M quand θ décrit $[0,\pi]$ est le segment $[AB]$ de la droite $y = x$ avec $A\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ et $B\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

2. a) On sait que la somme des racines de (E) est $-\frac{b}{a} = 2cos\theta e^{i\frac{\pi}{4}}$ donc l'équation admette deux solutions opposées signifie leur somme est nulle et par suite $2cos\theta e^{i\frac{\pi}{4}} = 0 \Leftrightarrow cos\theta = 0 \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Comme $\theta \in [0,\pi]$ alors $\theta = \frac{\pi}{2}$.

b) $\left(sin\theta\, e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)^2 = sin^2\theta e^{-i\frac{\pi}{2}} = -isin^2\theta$

c) Résolution de (E) : $\Delta = b^2 - 4ac = \left(2cos\theta e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^2 - 4i = 4cos^2\theta e^{i\frac{\pi}{2}} - 4i = 4i\left(cos^2\theta - 1\right) = -4isin^2\theta$

Donc $\Delta = 2^2\left(sin\theta\, e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)^2$ et une racine carrée de Δ est $\delta = 2sin\theta\, e^{-i\frac{\pi}{4}}$ ce qui donne

$$z_1 = \frac{2cos\theta e^{i\frac{\pi}{4}} - 2sin\theta\, e^{-i\frac{\pi}{4}}}{2} = cos\theta e^{i\frac{\pi}{4}} - sin\theta\, e^{-i\frac{\pi}{4}} = e^{i\frac{\pi}{4}}\left(cos\theta - sin\theta\, e^{-i\frac{\pi}{2}}\right) = e^{i\frac{\pi}{4}}\left(cos\theta + isin\theta\right)$$

$=e^{i\frac{\pi}{4}}e^{i\theta}=e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)}$

$z_2=\dfrac{2cos\theta e^{i\frac{\pi}{4}}+2sin\,\theta\, e^{-i\frac{\pi}{4}}}{2}=cos\theta e^{i\frac{\pi}{4}}+sin\,\theta\, e^{-i\frac{\pi}{4}}=e^{i\frac{\pi}{4}}\left(cos\theta+sin\,\theta\, e^{-i\frac{\pi}{2}}\right)=e^{i\frac{\pi}{4}}\left(cos\theta-isin\,\theta\right)$

$=e^{i\frac{\pi}{4}}e^{i(-\theta)}=e^{i\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)}$ donc l'ensemble des solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation (E) est $\left\{e^{i\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)},e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)}\right\}$

3. a) le milieu du segment $[M'M"]$ a pour affixe $\dfrac{z'+z"}{2}=\dfrac{e^{i\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)}+e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)}}{2}$

$=\dfrac{e^{i\left(\frac{\pi}{4}\right)}e^{i(-\theta)}+e^{i\left(\frac{\pi}{4}\right)}e^{i\theta}}{2}=\dfrac{e^{i\left(\frac{\pi}{4}\right)}\left(e^{i(-\theta)}+e^{i\theta}\right)}{2}=cos\theta\, e^{i\frac{\pi}{4}}=z_M$. Donc M est le milieu du segment $[M'M"]$

b) lorsque $\theta\neq\dfrac{\pi}{2}$, $z_M=cos\theta\, e^{i\frac{\pi}{4}}\neq 0$ et donc $\dfrac{z"-z'}{z}=\dfrac{e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)}-e^{i\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)}}{cos\theta\, e^{i\frac{\pi}{4}}}=$

$=\dfrac{e^{i\left(\frac{\pi}{4}\right)}e^{i\theta}-e^{i\left(\frac{\pi}{4}\right)}e^{i(-\theta)}}{cos\theta\, e^{i\frac{\pi}{4}}}=\dfrac{e^{i\left(\frac{\pi}{4}\right)}\left(e^{i\theta}-e^{i(-\theta)}\right)}{cos\theta\, e^{i\frac{\pi}{4}}}=\dfrac{2isin\theta}{cos\theta}=2itan\theta$

c) On vient de prouver que $\dfrac{z"-z'}{z}=2i\,tan\theta$ ou encore que $\dfrac{z_{M"}-z_{M'}}{z_M}=\dfrac{z_{\overrightarrow{M'M"}}}{z_{\overrightarrow{OM}}}$ est un imaginaire pur et

donc les vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{M'M"}$ sont orthogonaux pour tout réel de $[0,\pi]$ avec $\theta\neq\dfrac{\pi}{2}$.

Pour $\theta=\dfrac{\pi}{2}$, le point M est confondu avec le point O et donc $\overrightarrow{OM}=\vec{O}$ et le vecteur nul est orthogonal à tout vecteur.

Conclusion : Pour tout réel $\theta\in[0,\pi]$; $\overrightarrow{OM}\perp\overrightarrow{M'M"}$.

Exercice2

$|z|=1\Leftrightarrow \bar{z}=\dfrac{1}{z}\Leftrightarrow\dfrac{\bar{a}-\bar{b}}{1-\bar{a}b}=\dfrac{1-a\bar{b}}{a-b}\Leftrightarrow\left(\bar{a}-\bar{b}\right)\left(a-b\right)=\left(1-a\bar{b}\right)\left(1-\bar{a}b\right)$

$Or\ \left(\bar{a}-\bar{b}\right)\left(a-b\right)=|a|^2+|b|^2-\left(a\bar{b}-b\bar{a}\right)$

$\left(1-a\bar{b}\right)\left(1-\bar{a}b\right)=1+|a|^2|b|^2-\left(a\bar{b}-b\bar{a}\right)\ \ Ainsi\ \ |z|=1\Leftrightarrow|a|^2+|b|^2=1+|a|^2|b|^2$

$\Leftrightarrow 1+|a|^2|b|^2-|a|^2-|b|^2=0\Leftrightarrow\left(|a|^2-1\right)\left(|b|^2-1\right)=0$

Exercice3

1. a) $\Delta=b^2-4ac=-3=\left(i\sqrt{3}\right)^2$ donc une racine carrée de Δ est $\delta=i\sqrt{3}$

$\Rightarrow z_1=\dfrac{-b+\delta}{2a}=e^{i\frac{\pi}{3}}$, $z_2=\bar{z_1}=e^{-i\frac{\pi}{3}}$ car équation à coefficients réels. $S_C=\left\{e^{i\frac{\pi}{3}},e^{-i\frac{\pi}{3}}\right\}$

b) Ca revient à trouver les racines carrées des complexes $e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $e^{-i\frac{\pi}{3}}$ pour cela il suffit de résoudre

$z^2=e^{i\frac{\pi}{3}}\ et\ z^2=e^{-i\frac{\pi}{3}}$ ou encore $z^2=\left(e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^2$ et $z^2=\left(e^{i-\frac{\pi}{6}}\right)^2$ .on obtient quatre solutions

$e^{i\frac{\pi}{6}}, e^{-i\frac{\pi}{6}}, -e^{i\frac{\pi}{6}}, -e^{-i\frac{\pi}{6}}$.

2. $\Delta = 4cos^2 a - 4 = 4\left(cos^2 a - 1\right) = -4sin^2 a = \left(2i\ sina\right)^2 \Rightarrow z_1 = e^{ia}, z_2 = e^{-ia}$

3. $f(i) = 0$ vérification facile. Donc $f(z) = (z-i)\left(z^2 + az + b\right) = z^3 + z^2\left(a-i\right) + z\left(b - ia\right) - ib$ et l'égalité des polynômes permet d'écrire : $\begin{cases} a - i = -i - 2cosa \\ b - ia = 1 + 2icosa \\ -ib = -i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2cosa \\ b = 1 \\ b = 1 \end{cases}$ et donc

   $f(z) = (z-i)\left(z^2 - 2\cos az + 1\right)$ et d'après ce qui précède $S_C = \left\{ i, e^{i\frac{\pi}{3}}, e^{-i\frac{\pi}{3}} \right\}$

4. a) $z_{\overrightarrow{OA}} = i = z_{\overrightarrow{MN}}$ donc $OANM$ est un parallélogramme et $OA = OM = 1$ donc losange.

   b) Aire $(OANM)$= $\frac{1}{2} ON \times AM = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left|e^{ia} + i\right| \times \left|e^{ia} - i\right| = 1 \Leftrightarrow \left|e^{2ia} + 1\right| = 1$. Or

   $e^{2ia} + 1 = 2e^{ia}\ cosa \Rightarrow \left|e^{2ia} + 1\right| = 2cosa$ ce qui donne $2cosa = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ a = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \end{cases}$ $k \in \mathbb{Z}$ comme a un réel de l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ alors $a \in \left\{-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right\}$

   c) On vérifie que $z_N = i + e^{ia} = i\left(1 + e^{i\left(a - \frac{\pi}{2}\right)}\right)$ or $1 + e^{i\theta} = e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{-i\frac{\theta}{2}} + e^{i\frac{\theta}{2}}\right) = 2cos\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}}$ par suite

   $z_N = 2icos\left(\frac{a}{2} - \frac{\pi}{4}\right)e^{i\left(\frac{a}{2} - \frac{\pi}{4}\right)} = 2cos\left(\frac{a}{2} - \frac{\pi}{4}\right)e^{i\left(\frac{a}{2} + \frac{\pi}{4}\right)}$.Mais a est un réel de l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ donc $-\frac{\pi}{2} \prec a \prec \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow -\frac{\pi}{4} \prec \frac{a}{2} \prec \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} \prec \frac{a}{2} - \frac{\pi}{4} \prec 0$ et donc $2cos\left(\frac{a}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \succ 0$.

   d) On a $z_N - i = e^{ia} \Leftrightarrow \begin{cases} \left|z_N - i\right| = 1 \\ arg\left(z_N - i\right) \equiv a\left[2\pi\right] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} BN = 1 \\ \left(\vec{u}, \overrightarrow{BN}\right) \equiv a\left[2\pi\right] \end{cases}$ comme $a \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ alors l'ensemble des points N est un arc de cercle (du cercle de centre B et de rayon 1) . Faire une figure pour mieux comprendre.

Exercice4

1. On trouve $j^2 = \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = \bar{j} = e^{-i\frac{2\pi}{3}}$.

   $j^3 = 1 = e^{i0}$ et $1 + j = 1 - \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{\pi}{3}}$.

2. On a : $1 + j + j^2 = 0 \Leftrightarrow j^2 = -1 - j$.

   $a + bj + cj^2 = 0 \Leftrightarrow a + bj + c\left(-1 - j\right) = 0 \Leftrightarrow a - c = j(c - b) \Rightarrow |a - c| = |j||c - b| \Leftrightarrow |a - c| = |c - b|$ Faites de même pour l'autre égalité. Remarquons que dans ce cas le triangle ABC est équilatéral.

3. Le problème revient à résoudre l'équation : $2 + 4i + bj + icj^2 = 0$ avec b et c réels qu'il faut trouver.

$$2+4i+bj+icj^2=0 \Leftrightarrow 2+4i+b\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+ic\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=0 \quad \Leftrightarrow \begin{cases} 2-\frac{1}{2}b-\frac{\sqrt{3}}{2}c=0 \\ 4+\frac{\sqrt{3}}{2}b-\frac{1}{2}c=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b+\sqrt{3}c=4 \\ \sqrt{3}b-c=-8 \end{cases}.$$

On trouve $c=2+\sqrt{3}$ et $b=1-2\sqrt{3}$. Ainsi B est le point d'affixe $2+\sqrt{3}$ et C a pour affixe $i\left(1-2\sqrt{3}\right)$.

Exercice5

1. $\Delta=-\left(e^{i\theta}-2\right)^2-4\left(e^{i\theta}-1\right)=-e^{2i\theta}=\left(ie^{i\theta}\right)^2 \Rightarrow \delta=ie^{i\theta}$

   $z_1=\dfrac{-i\left(e^{i\theta}-2\right)-ie^{i\theta}}{2}=i-ie^{i\theta}$ et $z_1=\dfrac{-i\left(e^{i\theta}-2\right)+ie^{i\theta}}{2}=i$. $\qquad S_{\mathbb{C}}=\left\{i\,;i-ie^{i\theta}\right\}$

2. $H(i-ie^{i\theta})$ donc $z_H=i-ie^{i\theta} \Leftrightarrow z_H-i=-ie^{i\theta}=e^{i\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)} \Leftrightarrow |z_H-i|=1$ et $arg\left(z_H-i\right)\equiv\theta-\frac{\pi}{2}[2\pi]$ ou encore $BH=1$ et $\left(\vec{u},\overrightarrow{BH}\right)\equiv\theta-\frac{\pi}{2}[2\pi]$ avec B le point d'affixe i et $\theta-\frac{\pi}{2}\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$.

   L'ensemble des points H est le quart de cercle de centre B et de rayon 1, situé dans les demi-plans $x\succ 0$ *et* $y\succ 0$.

3. a) M étant distinct de B donc $\dfrac{z_{\overrightarrow{AM'}}}{z_{\overrightarrow{BM}}}=\dfrac{z'-1}{z-1}=\dfrac{\frac{\overline{z}-i}{\overline{z}+i}-1}{z-1}=\dfrac{-2i}{(z-i)\left(\overline{z-i}\right)}=\dfrac{-2i}{|z-i|^2}\in i\,\mathbb{R}$.

   Ainsi pour $M\neq B$ $\dfrac{z_{\overrightarrow{AM'}}}{z_{\overrightarrow{BM}}}\in i\,\mathbb{R}$ et donc $\overrightarrow{AM'}\perp\overrightarrow{BM}$

   M est un point du cercle trigonométrique privé de B signifie $OM=1$ et $M\neq B$

   $\Leftrightarrow |z|=1$ *et* $z\neq i \Leftrightarrow z=e^{i\theta},\theta\in\mathbb{R}$

   et $\theta\neq\dfrac{\pi}{2}\Leftrightarrow z'=\dfrac{e^{-i\theta}-i}{e^{-i\theta}+i}=\dfrac{\left(e^{-i\theta}-i\right)\left(e^{i\theta}-i\right)}{\left|\left(e^{-i\theta}-i\right)\right|^2}=\dfrac{e^{-i\theta}e^{i\theta}-ie^{i\theta}-ie^{-i\theta}-1}{\left|\left(e^{-i\theta}-i\right)\right|^2}=\dfrac{-i\left(e^{i\theta}+e^{-i\theta}\right)}{\left|\left(e^{-i\theta}-i\right)\right|^2}=\dfrac{-2i\,cos\theta}{\left|\left(e^{-i\theta}-i\right)\right|^2}$

   Donc $z'\in i\,\mathbb{R}$. Ainsi pour M un point du cercle trigonométrique privé de B alors M' appartient à l'axe des ordonnées.

   Construction de M' :

   on sait que M' est un point de $\left(O,\vec{v}\right)$, de plus $\overrightarrow{AM'}\perp\overrightarrow{BM}$ donc M' est un point de la perpendiculaire à (BM) en A . D'où la construction.

4. a) $\dfrac{z+i}{z-i}=e^{-i\alpha}\Leftrightarrow z+i=e^{-i\alpha}\left(z-i\right)\Leftrightarrow z\left(1-e^{-i\alpha}\right)=-i-ie^{-i\alpha}\Leftrightarrow z=\dfrac{-i\left(1+e^{-i\alpha}\right)}{\left(1-e^{-i\alpha}\right)}=$

$$\frac{-i\left(e^{-i\frac{\alpha}{2}}e^{i\frac{\alpha}{2}}+e^{-i\frac{\alpha}{2}}e^{-i\frac{\alpha}{2}}\right)}{\left(e^{-i\frac{\alpha}{2}}e^{i\frac{\alpha}{2}}-e^{-i\frac{\alpha}{2}}e^{-i\frac{\alpha}{2}}\right)}=\frac{-ie^{-i\frac{\alpha}{2}}\left(e^{i\frac{\alpha}{2}}+e^{-i\frac{\alpha}{2}}\right)}{e^{-i\frac{\alpha}{2}}\left(e^{i\frac{\alpha}{2}}-e^{-i\frac{\alpha}{2}}\right)}=\frac{-2icos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{2isin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}=-cot\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

b) l'équation : $\left(\bar{z}-i\right)^3=\frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i)\left(\bar{z}+i\right)^3$ est équivalente à l'équation : $\left(z+i\right)^3=\frac{\sqrt{2}}{2}(-1-i)\left(z-i\right)^3$ et remarquons que $z=i$ n'est pas solution de cette équation donc

l'équation est équivalente à : $\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^3=\frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i)=e^{i\frac{3\pi}{4}}$ ou encore $Z^3=e^{i\frac{3\pi}{4}}$ *et* $Z=\frac{z+i}{z-i}$

Les solutions de $Z^3=e^{i\frac{3\pi}{4}}$ sont les $Z_k=e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2k\pi}{3}\right)}$, $k\in\{0,1,2\}$ avec $Z_k=\frac{z_k+i}{z_k-i}$ .Finalement

$z_k=-cot\left(\frac{\alpha}{2}\right)=-cot\left(\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{3}\right), k\in\{0,1,2\}$.

Exercice 6

1. a) $1+2i\,sin2\alpha\,e^{2i\alpha}=1+\left(e^{2i\alpha}-e^{-2i\alpha}\right)e^{2i\alpha}=1+e^{4i\alpha}-1=e^{4i\alpha}$.

   b) $\Delta=1-4\left(-\frac{1}{2}i\,sin2\alpha\,e^{2i\alpha}\right)=1+2i\,sin2\alpha\,e^{2i\alpha}=\left(e^{2i\alpha}\right)^2\Rightarrow\delta=e^{2i\alpha}$

   $z_1=\frac{-1-e^{2i\alpha}}{2}$ et $z_1=\frac{-1+e^{2i\alpha}}{2}$ et donc $S_{\mathbb{C}}=\left\{\frac{-1-e^{2i\alpha}}{2},\frac{-1+e^{2i\alpha}}{2}\right\}$.

   $z_1=\frac{\left(-1-e^{2i\alpha}\right)}{2}=-\frac{1}{2}\left(1+e^{2i\alpha}\right)=-\frac{1}{2}\times 2cos\alpha e^{i\alpha}=cos\alpha\,e^{i(\alpha+\pi)}$ avec $cos\alpha\succ 0$ (α un réel de$]0,\frac{\pi}{2}[$)

   et $z_2=\frac{\left(-1+e^{2i\alpha}\right)}{2}=\frac{1}{2}\left(e^{2i\alpha}-1\right)=i\,sin\alpha e^{i\alpha}=sin\alpha\,e^{i(\alpha+\frac{\pi}{2})}$ avec $sin\alpha\succ 0$.

2. $H\left(-cos\alpha\,e^{i\alpha}\right)$ et $K\left(i\,sin\alpha\,e^{i\alpha}\right)$:

   a) $HK=\left|z_K-z_H\right|=\left|i\,sin\alpha\,e^{i\alpha}+cos\alpha\,e^{i\alpha}\right|=\left|e^{i\alpha}\left(cos\alpha+i\,sin\alpha\right)\right|=\left|e^{2i\alpha}\right|=1$

   De plus $\frac{z_H+z_K}{2}=\frac{-cos\alpha e^{i\alpha}+i\,sin\alpha e^{i\alpha}}{2}=\frac{-e^{i\alpha}\left(cos\alpha-isin\alpha\right)}{2}=-\frac{1}{2}$. Donc le milieu de [$HK$] est un point fixe $I\left(-\frac{1}{2},0\right)$ et HK = 1 et par suite [HK] est un diamètre du cercle de centre I et de rayon $\frac{1}{2}$.

   b) Pour α un réel de$]0,\frac{\pi}{2}[$; $cos\alpha\succ 0$ et donc $z_H\neq 0$

   $\frac{z_K}{z_H}=\frac{i\,sin\alpha e^{i\alpha}}{-cos\alpha e^{i\alpha}}=-itan\alpha\in i\,\mathbb{R}$. Donc $\frac{z_{\overrightarrow{OK}}}{z_{\overrightarrow{OH}}}$ est imaginaire pur et par suite $\overrightarrow{OH}\perp\overrightarrow{OK}$ donc OHK est rectangle en O.

   Il est isocèle lorsque $\left|\frac{z_K}{z_H}\right|=1\Leftrightarrow tan\alpha=1\left(\alpha\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[\right)\Leftrightarrow\alpha=\frac{\pi}{4}$.

3. a) M invariant par f signifie $f(M)=M\Leftrightarrow z'=z\Leftrightarrow z=\frac{\bar{z}-1}{\bar{z}}\Leftrightarrow z\bar{z}=\bar{z}-1\Leftrightarrow x^2+y^2=x-iy-1$

   avec $z=x+i\,y$, x et y réels $\Leftrightarrow x^2+y^2=-1+x$ *et* $y=0\Leftrightarrow x^2-x+1=0$ *et* $y=0$ or l'équation

   $x^2-x+1=0$ n'admet pas de solution, le système est alors impossible et par suite f n'admet pas de points invariants.

   b) $H'=f\left(H\right)\Rightarrow z_{H'}=\frac{\overline{z_H}-1}{\overline{z_H}}=\frac{-cos\alpha e^{-i\alpha}-1}{-cos\alpha e^{-i\alpha}}=\frac{\left(-cos\alpha e^{-i\alpha}-1\right)e^{i\alpha}}{-cos\alpha}=\frac{-cos\alpha-e^{i\alpha}}{-cos\alpha}=$

$\dfrac{-2cos\alpha - isin\alpha}{-cos\alpha} = 2 + itan\alpha$. D'où $H'(2 + itan\alpha)$.

On prouve de même que $K'(2 - icot\alpha)$.

c) $\dfrac{z_{H'} + z_{K'}}{2} = \dfrac{2 + itan\alpha + 2 - i\,cot\alpha}{2} = \dfrac{4 + i(tan\alpha - cot\alpha)}{2} = 2 + \dfrac{i}{2}\left(\dfrac{sin\alpha}{cos\alpha} - \dfrac{cos\alpha}{sin\alpha}\right) =$

$2 + \dfrac{i}{2}\left(\dfrac{sin^2\alpha - cos^2\alpha}{cos\alpha sin\alpha}\right) = 2 + i\dfrac{-cos2\alpha}{sin2\alpha} = 2 - icot\alpha$.

Donc si I est le milieu de $[H'K']$ alors $x_I = 2$ et $y_I = -cot(2\alpha)$.

L'ensemble des points I est la droite $x = 2$ en effet $cot(]0, \pi[) = \mathbb{R}$.

4. a) Pour $M \neq O$; $\dfrac{z_{\overrightarrow{AM'}}}{z_{\overrightarrow{OM}}} = \dfrac{z'-1}{z} = \dfrac{\dfrac{\bar{z}-1}{\bar{z}} - 1}{z} = \dfrac{\bar{z} - 1 - \bar{z}}{z\bar{z}} = \dfrac{-1}{|z|^2} \in \mathbb{R}$. Ainsi $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{AM'}$ sont colinéaires.

b) Pour $M \neq A$; $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM'}) \equiv arg(z')[2\pi] \Leftrightarrow$

$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM'}) \equiv arg\left(\dfrac{\bar{z}-1}{\bar{z}}\right)[2\pi] \Leftrightarrow (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM'}) \equiv -arg\left(\dfrac{z-1}{z}\right)[2\pi]$

$\Leftrightarrow (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM'}) \equiv -(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{AM})[2\pi] \Leftrightarrow (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM'}) \equiv (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{OM})[2\pi]$

Ainsi $\forall M \neq O$, $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM'}) \equiv (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{OM})[2\pi]$.

c) **Construction du point *M'* lorsque *M* appartient au cercle de diamètre [*OA*] privé de *O* et *A*.**

M appartient au cercle de diamètre [*OA*] privé de *O* et *A* $\Leftrightarrow (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{OM}) \equiv \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ et donc

$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM'}) \equiv \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ et par suite $M' \in (o, \vec{v}) \setminus \{O\}$ et d'après la question 4. a) *M'* est un point de la droite parallèle à (*OM*) passant par *A*. D'où la construction.