NOMBRES COMPLEXES : Révision pour le premier chapitre 4Sc

EXERCICE 1:

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$,on note A le point d'affixe 1 et B le point d'affixe 3 + 2i. On appelle f l'application qui, à tout point M distinct de A et d'affixe z , associe le point M' d'affixe z' définie par $z'=\dfrac{z-1+2i}{z-1}$

1. Calculer les affixes des points O' et B', images respectives des points O et B par f.
Placer les points A, O', B et B' dans le plan.

2. **a.** Pour tout nombre complexe z différent de 1, Calculer, le produit $(z'-1)(z-1)$.
b. En déduire que, pour tout point M distinct de A, on a :

$$AM.AM' = 2 \text{ et } (\vec{u};\overrightarrow{AM})+(\vec{u};\overrightarrow{AM'})=\frac{\pi}{2}+2k\pi, \qquad k\in Z$$

3. Démontrer que, si M appartient au cercle (C) de centre A passant par O, alors M' appartient à un cercle (C'). En précisera le centre et le rayon. Construire (C) et (C').

4. **a.** Déterminer une mesure de l'angle $(\vec{u};\overrightarrow{AB})$.
b. Démontrer que, si M est un point autre que A de la demi-droite (Δ) d'origine A, passant par B, alors M 'appartient à une demi-droite que l'on précisera.

5. On appelle P le point d'intersection du cercle (C) et de la demi-droite (Δ). Placer son image P' sur la figure.

EXERCICE 2

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$.On appelle A le point d'affixe −1 et B le point d'affixe 1. On appelle E l'ensemble des points du plan distincts de A, O et B.
À tout point M d'affixe z appartenant à l'ensemble E , on associe le point N d'affixe z^2 et le point P d'affixe z^3 .
1. Prouver que les points M, N et P sont deux à deux distincts.
2. On se propose dans cette question de déterminer l'ensemble F des points M appartenant à E tels que le triangle MNP soit rectangle en P.
a. En utilisant le théorème de Pythagore, démontrer que :
MNP est rectangle en P si et seulement si $|z+1|^2+|z|^2=1$.
b. Démontrer que $|z+1|^2+|z|^2=1$ équivaut à $\left(z+\frac{1}{2}\right)\left(\overline{z+\frac{1}{2}}\right)=\frac{1}{4}$.
c. En déduire l'ensemble F cherché.
3. Soit M un point de E et z son affixe, on désigne par r le module de z et α l'argument de z, $\alpha\in\,]-\pi\,;+\pi]$.
a. Démontrer que l'ensemble H des points M de E tels que l'affixe de P soit un réel strictement positif est la réunion de trois demi-droites (éventuellement privées de points).
b. Représenter les ensembles H et F dans le repère $(O\,;\vec{u},\vec{v})$.
c. Déterminer les affixes des points M de E tels que le triangle MNP soit rectangle en P, l'affixe de P étant un réel strictement positif.

EXERCICE 3

Soit a et b deux nombres réels, on considère les nombres complexes z et z' de module 1 et d'arguments respectifs a et b.

1. Montrer, en utilisant la forme exponentielle de z et z', que $\dfrac{(z+z')^2}{zz'}$ est un réel positif ou nul.

2. En déduire que si $\dfrac{(z+z')^2}{zz'}$ est non nul , alors : arg $[z + z']$ = $\dfrac{1}{2}$(arg $[z]$ + arg $[z']$) +2kπ , k∈ ℤ.

3. On appelle M et M' les images de z et z' dans le plan muni d'un repère orthonormé direct de centre O et N le point tel que OMNM' soit un parallélogramme. Interpréter géométriquement l'égalité précédente à l'aide de ces points.