EXERCICE N°1 :	15'	3 points

Répondre par VRAI ou FAUX . Avec justification .

(1) $\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{8}}$ est une racine quatrième de $-2i$.

(2) Si $z=-2e^{i\frac{\pi}{3}}$ alors un argument de $\frac{2i}{z}$ est $\frac{5\pi}{6}$.

(3) L'ensemble des points $M(z)$ tel que $\frac{iz+5}{z-1}$ est imaginaire , est une droite .

EXERCICE N°2 :	30'	4 points

On munit le plan complexe d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

Soient les points A et C d'affixes respectives $z_A=\sqrt{3}+i$ et $z_C=-1+i\sqrt{3}$.

(1) Mettre z_A et z_C sous forme exponentielle .

(2) Montrer que $\frac{z_C}{z_A}=i$. En déduire la nature du triangle OAC .

(3) a - Construire les points A et C dans le repère $(O,\vec{u},\vec{v})$.

b - Construire le point B pour que OABC soit un carré .

(4) a - Donner une mesure de l'angle $(\vec{u},\overrightarrow{OB})$.

b - Ecrire z_B sous forme exponentielle puis déduire la valeur exacte de $\tan\left(\frac{5\pi}{12}\right)$.

EXERCICE N°3 :	40'	6 points

On munit le plan complexe d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

(1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2-2z+2=0$.

(2) On considère l'équation (E) : $z^3-(2+i)z^2+(2+2i)z-2i=0$.

a - Vérifier que i est une solution de l'équation (E) .

b - Déterminer alors les autres solutions z_1 et z_2 de l'équation (E) sachant que $Im(z_1)<Im(z_2)$.

(3) a - Mettre z_1 sous la forme exponentielle .

b - Déterminer les racines cubiques du nombre complexe z_1 .

c - Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (F) : $z^9-(2+i)z^6+(2+2i)z^3-2i=0$.

d - Vérifier que $(1-i)(2+i)^3=13+9i$.

e - Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^3=13+9i$.

Dans l'annexe ci-jointe (Figure 1), (O,u,v) est un repère orthonormé direct du plan et (C) est le cercle de centre O et de rayon $\sqrt{3}$.

1/ Soit A le point d'affixe $a = 1 + i\sqrt{2}$.

a) Montrer que A appartient au cercle (C).

b) Placer A.

2/ On considère dans $\mathbb{C}$, l'équation (E) : $z^2 - 2i\sqrt{3}z - 6i\sqrt{2} = 0$.

a) Montrer que le discriminant Δ de l'équation (E) est égal à $12a^2$.

b) En déduire que les solutions de l'équation (E) sont :

$$z_1 = \sqrt{3}\left[-1 + i(1 - \sqrt{2})\right] \quad \text{et} \quad z_2 = \sqrt{3}\left[1 + i(1 + \sqrt{2})\right]$$

3/ On considère le point K d'affixe $z_K = i\sqrt{3}$ et on désigne par M_1 et M_2 les points d'affixes respectives z_1 et z_2.

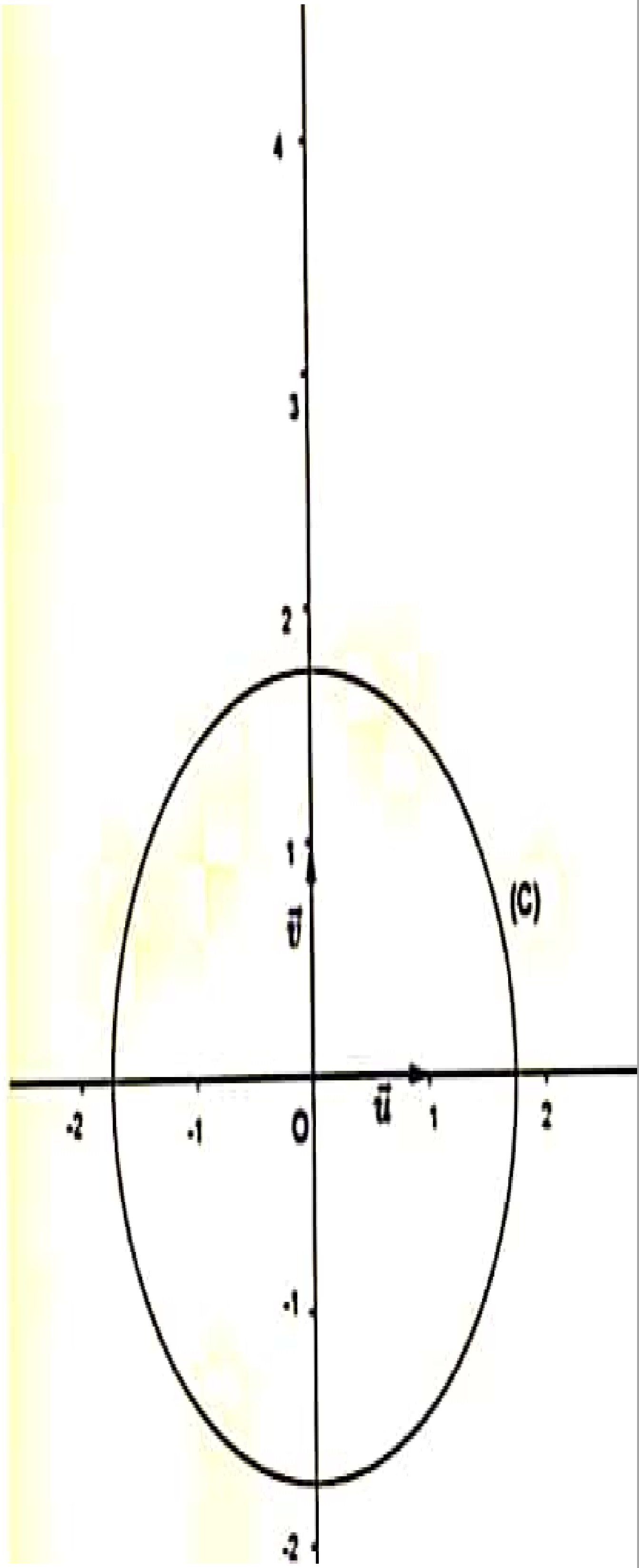
a) Vérifier que K est le milieu du segment $[M_1M_2]$.

b) Montrer que $\dfrac{z_2 - z_1}{a} = 2\sqrt{3}$.

En déduire que la droite (M_1M_2) est parallèle à la droite (OA).

c) Montrer que $M_1M_2 = 6$.

d) Placer le point K et construire alors les points M_1 et M_2.



Exercice 1

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

On considère les points A et B d'affixes respectives $a = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$ et $b = 2e^{i\frac{\pi}{4}}$.

1) a) Construire, dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$, les points A et B.

b) Ecrire a et b sous forme algébrique.

2) La droite parallèle à l'axe des ordonnées passant par A et la droite parallèle à l'axe des abscisses passant par B se coupent en un point C.

a) Déterminer l'affixe c du point C.

b) Vérifier que $c^2 = 1 + 2i\sqrt{6}$.

3) On considère le point D d'affixe c^2.

a) Montrer que $OD = 5$.

b) En déduire une construction du point D.

4) Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $2z^2 - 2z - i\sqrt{6} = 0$.

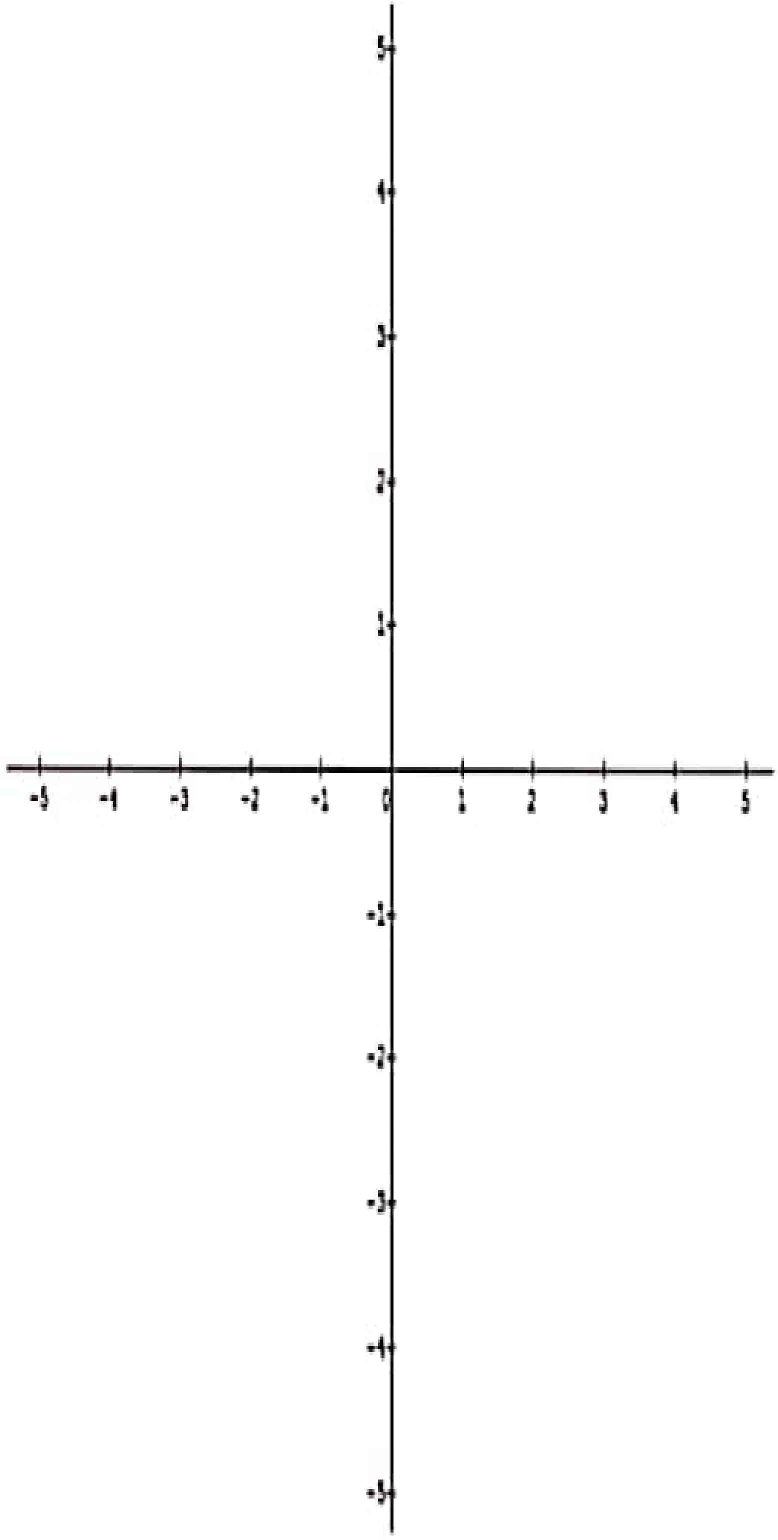
On désigne par z_1 la solution dont la partie réelle et la partie imaginaire sont positives et par z_2 l'autre solution.

5) Soit les points I, M_1 et M_2 d'affixes respectives 1, z_1 et z_2.

a) Justifier que le point M_1 est le milieu du segment $[IC]$.

b) Montrer que le quadrilatère OCM_1M_2 est un parallélogramme.

c) Construire les points M_1 et M_2.



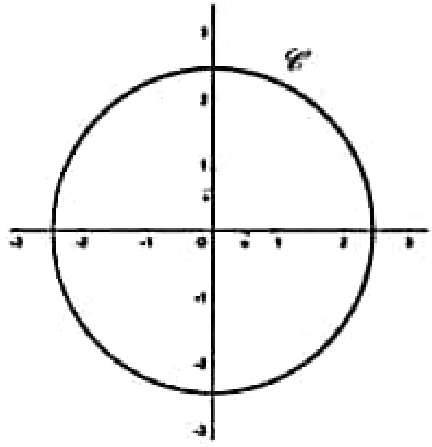
EXERCICE N°4 : 35' 5 points

(1) a - Vérifier que : $\left(\sqrt{2}+2i\right)^2=-2+4i\sqrt{2}$.

b - Résoudre dans ℂ l'équation $(E): z^2-\left(\sqrt{2}+2\right)z+2+\sqrt{2}-i\sqrt{2}=0$.

(2) Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$, on donne les points A , B , C et D d'affixes respectives : $z_A=1$, $z_B=1-i$, $z_C=1+\sqrt{2}+i$ et $z_D=\sqrt{2}+2i$.

Dans la figure ci-dessous , on a tracé un cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon $\sqrt{6}$.



a - Vérifier que le point D appartient à $\mathscr{C}$ puis construire D .

b - Montrer que le quadrilatère OBCD est un parallélogramme .

c - Construire alors le point C .

(3) a - Déterminer la forme exponentielle de z_B .

b - Prouver que $z_B \times z_C=\sqrt{2}\,\overline{z_C}$ et déduire que $\arg(z_B)+2\arg(z_C)=2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.

c - Déterminer la forme exponentielle de z_C et déduire la valeur exacte de $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

EXERCICE N°5 : 35' 5 points

On considère dans ℂ l'équation $(E): (1-i)z^2-2(\cos\theta+\sin\theta)z+1+i=0$ où $\theta\in[0,\pi]$.

On note z_1 et z_2 les solutions de (E) avec $\operatorname{Im}(z_1)\geq 0$ pour tout $\theta\in[0,\pi]$.

(1) a - Sans calculer z_1 et z_2 , montrer que : $z_2=iz_1$.

b - Trouver alors une relation entre les modules de z_1 et z_2 et une relation entre leurs arguments .

(2) a - Vérifier que : $1-\sin(2\theta)=(\cos\theta-\sin\theta)^2$.

b - Résoudre dans ℂ l'équation (E) puis vérifier que $z_1=e^{i\theta}$ et $z_2=e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}$.

(3) Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$, on considère les points M_1 et M_2 d'affixes respectives z_1 et z_2 .

Déterminer les ensembles décrits respectivement par M_1 et M_2 lorsque θ varie dans $[0,\pi]$.