1 Nombres Complexes

L'essentiel

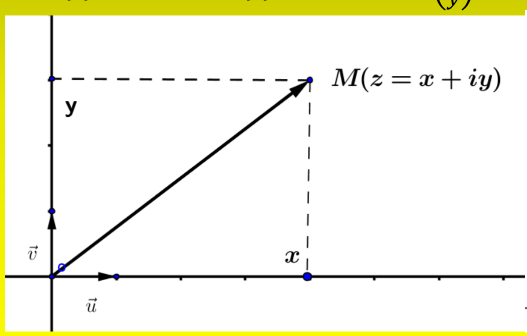
Forme algébrique d'un nombre complexe

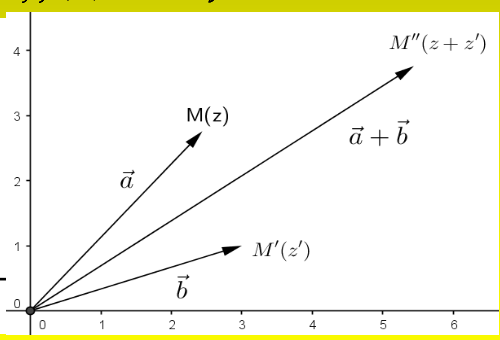
- Tout nombre complexe z s'écrit de façon unique sous la forme $z = x + iy$ ou x et y sont des réels
- Le réel x est appelé partie réelle de z
- Le réel y est appelé partie imaginaire de z
- On note $\mathcal{R}e(z) = x$ et $\Im m(z) = y$
- Z est réel $\Leftrightarrow y = 0$; Z est imaginaire $\Leftrightarrow x = 0$
- $z = 0 \Leftrightarrow x = 0$ et $y = 0$
- $z = z' \Leftrightarrow \mathcal{R}e(z) = \mathcal{R}e(z')$ et $\Im m(z) = \Im m(z')$

Affixe d'un point – affixe d'un vecteur

Le plan muni d'un repère orthonormé direct $(o, \vec{u}, \vec{v})$ est appelé plan complexe

- A tout point M de coordonnées (x, y) on associe le nombre complexe $z = x + iy$
  On dit que z est l'affixe de M ou M est l'image de z et on note $M(z)$ ou $z_M = z$
- L'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est le nombre complexe $z_B - z_A$ et on note $aff(\overrightarrow{AB}) = z_B - z_A$
- $aff(\vec{u}) = 1$; $aff(\vec{v}) = i$; $\vec{w}\binom{x}{y} \Leftrightarrow aff(\vec{w}) = x + iy$





Conjugué d'un nombre complexe

Soit $z = x + iy$ ou x et y sont des réels
- On appelle conjugué du complexe z le complexe noté $\bar{z}$ est définie par $\bar{z} = x - iy$
- Soit z et z' deux nombres alors $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z'}$; $\overline{zz'} = \bar{z}\,\bar{z'}$; $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z'}}$, $z' \neq 0$ et $\overline{z^n} = \bar{z}^n$
- $z + \bar{z} = 2\,\mathcal{R}e(z) = 2x$
- $z - \bar{z} = 2\,\Im m(z) = 2y$
- $z\bar{z} = x^2 + y^2$
- z est réel si et seulement si $z = \bar{z}$
- z est imaginaire si et seulement si $z = -\bar{z}$

Dans le plan complexe, le point M' d'affixe $\bar{z}$ est l'image du point M d'affixe z par la symétrie par rapport à l'axe des abscisses.

Module d'un nombre complexe

Le plan muni d'un repère orthonormé direct $(o\,,\vec{u},\vec{v})$
- Soit $z = x + iy$ ou x et y sont des réels et M le point d'affixe z alors le module de z est le réel positif noté $|z|$ est définie par $|z| = OM = \sqrt{x^2 + y^2} = z\bar{z}$
- $AB = |z_B - z_A|$
- Soit z et z' deux nombres complexes alors

$$|z| = |\bar{z}| = |-z| \ ; |zz'| = |z||z'|; \left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}\ ,\ z' \neq 0 \ \ ; |z^n| = |z|^n \ ,z \neq 0 \ et\ n \in \mathbb{Z}$$

$$|z + z'| \leq |z| + |z'|$$

Arguments d'un nombre complexe non nul

Le plan muni d'un repère orthonormé direct $(o\,,\vec{u},\vec{v})$
- Soit z un nombre complexe non nul et M le point d'affixe z alors un argument de z est Toute mesure de $(\vec{u},\overrightarrow{OM})$ on note $arg(z) \equiv (\vec{u},\overrightarrow{OM})[2\pi]$
- Soit z et z' deux nombres complexes non nuls alors et $n \in \mathbb{Z}$

$$;\ arg\left(\frac{z}{z'}\right) \equiv arg(z) + arg(z')[2\pi] arg(zz') \equiv arg(z) + arg(z')[2\pi]$$

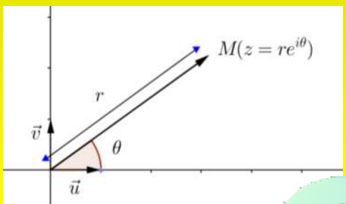
$$arg(z^n) \equiv n\, arg(z)[2\pi]$$

Forme trigonométrique d'un nombre complexe non nul

Soit z un nombre complexe non nul de module r et dont un argument est θ
Alors $z = r(cos\theta + isin\theta)$ .Cette écriture est appelée écriture trigonométrique de z

Forme exponentielle d'un nombre complexe non nul

- Pour tout réel θ on pose $e^{i\theta} = cos\theta + isin\theta$
- Si z un nombre complexe non nul de module r et dont un argument est θ, on appelle écriture exponentielle de z l'écriture $z = re^{i\theta}$



Forme exponentielle d'un nombre complexe non nul

- Pour tout réel θ on pose $e^{i\theta} = cos\theta + isin\theta$
- Si z un nombre complexe non nul de module r et dont un argument est θ, on appelle écriture exponentielle de z l'écriture $z = re^{i\theta}$
- Soit θ un réel alors $-e^{i\theta} = e^{i(\pi+\theta)}$ $\overline{(e^{i\theta})} = e^{-i\theta} = \frac{1}{e^{i\theta}}$
- Soit θ et θ' deux réel alors $e^{i\theta}e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$, $\frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}$ et $\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$, $n \in \mathbb{Z}$

Lien entre écriture cartésienne et écriture exponentielle

$$r = \sqrt{x^2+y^2} \quad \begin{cases} cos(\theta) = \frac{x}{r} \\ sin(\theta) = \frac{y}{r} \end{cases}$$

Écriture cartésienne
$z = x + iy$,$(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

Écriture exponentielle
$z = re^{i\theta}, r > 0, \theta \in \mathbb{R}$

$$x = rcos(\theta) \ , \ y = rsin(\theta)$$

Soit ρ est un réel non nul , θ un réel et $z = \rho e^{i\theta}$

Alors la forme exponentielle de z n'est pas toujours $\rho e^{i\theta}$

Si $\rho > 0$, la forme exponentielle de z est $\rho e^{i\theta}$

Si $\rho < 0$, la forme exponentielle de z est $-\rho e^{i(\pi+\theta)}$

Pour montrer qu'un nombre complexe est réel on peut

- Montrer que sa partie imaginaire est nulle
- Montrer qu'il est égal a son conjugué
- Montrer qu'il est nul ou que son argument est $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

Pour montrer qu'un nombre complexe est imaginaire on peut

- Montrer que sa partie réelle est nulle
- Montrer qu'il est égal à l'opposé de son conjugué
- Montrer qu'il est nul ou que son argument est $\frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

Pour montrer qu'un nombre complexe est imaginaire on peut

- Montrer que sa partie réelle est nulle
- Montrer qu'il est égal à l'opposé de son conjugué
- Montrer qu'il est nul ou que son argument est $\frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

Formule d'Euler

Pour tout réel θ on a $cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$ et $sin\ \theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$

Formule de Moivre

Pour tout réel θ et pour tout entier n on a $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$

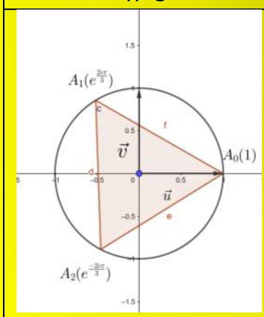
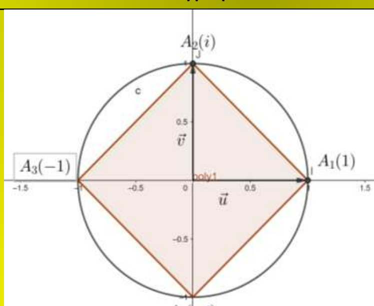
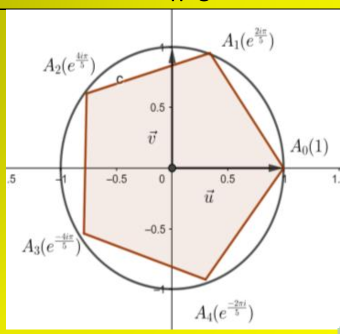
Soit a et b deux réels pour écrire $e^{ia} + e^{ib}$

Sous forme $\rho e^{i\varphi}$ avec $(\rho, \varphi) \in \mathbb{R}^2$ On peut factoriser par $e^{i\frac{a+b}{2}}$

$$e^{ia} + e^{ib} = e^{i\frac{a+b}{2}}\left(e^{i\frac{a-b}{2}} + e^{-i\frac{a-b}{2}}\right) = 2cos\left(\frac{a-b}{2}\right)e^{i\frac{a+b}{2}}$$

Equation $z^n = a$, $n \in \mathbb{N}^*$

- L'équation $z^n = 1$ admet dans $\mathbb{C}$ n solutions distinctes deux a deux, appelées les racines $n^{i-\text{ème}}$ de l'unité qui sont $w_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}}, k \in \{0,1 \dots n-1\}$
- Soit $a = re^{i\theta}, r > 0$ .L'équation $z^n = a$, $n \in \mathbb{N}^*$admet dans C n solutions deux a deux distinctes appelées les racines $n^{i-\text{ème}}$ de a qui sont $z_k = \sqrt[n]{r}\ e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}}, k \in \{0,1 \dots n-1\}$
- Les images des racines $n^{i-\text{ème}}$ de unité forme un polygone régulier inscrit dans le cercle trigonométrique dont l'un des sommet est le point d'affixe 1

n=3	n=4	n=5
		

Equation de second degré a coefficients complexe

- Soit (E) équation $az^2 + bz + c = 0, a \neq 0$ et soit $\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant de (E)
  Il existe un nombre complexe δ tel que $\delta^2 = \Delta$ alors
- les solutions de (E) sont $z_1 = \frac{-b+\delta}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b-\delta}{2a}$
- $az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2)$
- $z_1 + z_2 = \frac{-b}{a}$ et $z_1 \times z_2 = \frac{c}{a}$

Angles orientes et conséquence

- Soit ABC et D quatre points distincts du plan alors
- $\left(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{AB}}\right) \equiv (Z_B - Z_A)[2\pi]$
- $\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}}\right) \equiv \arg(\frac{Z_D - Z_C}{Z_B - Z_A})\ [2\pi]$
- Soit $\vec{w}$ et $\vec{w}'$ deux vecteurs du plan tel que $\vec{w}' \neq \vec{O}$ alors
- $\vec{w}$ et $\vec{w}'$ dont colinéaires si et seulement si $\frac{aff(\vec{w})}{aff(\vec{w'})} \in \mathrm{R}$
- $\vec{w}$ et $\vec{w}'$ dont orthogonaux si et seulement si $\frac{aff(\vec{w})}{aff(\vec{w'})} \in i\mathrm{R}$

Comprendre

Exercice 1

Déterminer l'écriture cartésienne de chacun des nombre complexe suivants

$z_1 = (1+i)^2$,$z_2 = (1-i)^2$, $z_3 = \frac{1+3i}{1-2i}$, $z_4 = (\sqrt{3}+i)^6$, $z_5 = \frac{1+i\sqrt{3}}{1+i}$

Correction

$z_1 = 1 + 2i - 1 = 2i$

$z_2 = 1 - 2i - 1 = -2i$

$z_3 = \frac{(1+3i)(1-i)}{1^2+2^2} = \frac{1+2i+3i-6}{5} = -1 + i$

$z_4 = \left(2e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^6 = 64e^{i\pi} = -64$

$z_5 = \frac{(1+i\sqrt{3})(1-i)}{2} = \frac{\sqrt{3}+1}{2} + i\frac{\sqrt{3}-1}{2}$

Remarque

$z_5=\frac{2e^{i\frac{\pi}{3}}}{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}=\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)$ Alors par identification on obtient

$$\begin{cases}\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\\ \sin\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\end{cases}$$

Exercice2

Déterminer l'écriture exponentielle de chacun des nombres complexes suivants

$z_1=-1+i\sqrt{3}$, $z_2=\left(\sqrt{3}-i\right)^2(1+i)$, $z_3=\frac{(1-i)^3}{1-i\sqrt{3}}$, $z_4=1+\sqrt{2}+i\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)$,

$z_5=e^{i\theta}+i,\theta\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right[$

Correction

$z_1=2\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=2\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)=2e^{i\frac{2\pi}{3}}$

$z_2=?$

D'une part on a $\sqrt{3}-i=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)=2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)=2e^{-i\frac{\pi}{6}}$

Donc $\left(\sqrt{3}-i\right)^2=4e^{-i\frac{\pi}{3}}$

D'autre part $1+i=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ ainsi $z_2=2e^{-i\frac{\pi}{6}}\times\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}=2\sqrt{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right)}=2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}$

$z_3=?$

D'une part $1-i=\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$ donc $(1-i)^3=2\sqrt{2}e^{-i\frac{3\pi}{4}}$ d'aitre part $1-i\sqrt{3}=2e^{-i\frac{\pi}{3}}$

Ainsi $z_3=\frac{2\sqrt{2}e^{-i\frac{3\pi}{4}}}{2e^{-i\frac{\pi}{3}}}=\sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{3}-\frac{3\pi}{4}\right)}=\sqrt{2}e^{-i\frac{5\pi}{12}}$

$z_4=\sqrt{2}+i\sqrt{2}+1+i\sqrt{3}=2e^{i\frac{\pi}{3}}+2e^{i\frac{\pi}{4}}=2\left(e^{i\frac{\pi}{3}}+e^{i\frac{\pi}{4}}\right)=2e^{i\frac{7\pi}{24}}\left(e^{i\frac{\pi}{24}}+e^{-i\frac{\pi}{24}}\right)=4\cos\left(\frac{\pi}{24}\right)e^{i\frac{7\pi}{24}}$

$z_5=e^{i\theta}+e^{i\pi/2}=e^{i\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}\left(e^{i\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}+e^{-i\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}\right)=4\cos\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)e^{i\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}$ et comme $-\frac{\pi}{2}\langle\theta\langle\frac{3\pi}{2}$

Alors $-\frac{\pi}{4}<\frac{\theta}{2}<\frac{3\pi}{4}$ donc $-\frac{\pi}{2}<\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{2}$ D'où $\cos\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\rangle 0$ ainsi l'ecriture exponentielle de z_5 est

$$2\cos\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)e^{i\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}$$

Remarques

Comment simplifier dans certains cas une expression complexe écrite sous forme d'une somme

1) Si Z est une somme ou une différence de complexe conjugues, on remarque alors que $z+\bar{z}=2\mathrm{Re}(z)$ et $z-\bar{z}=2i\mathrm{Im}(z)$

2) Si Z est la somme de deux nombres complexes de module 1, on écrit pur tout

$(a,b) \in \mathrm{R}^2$ On a $e^{ia} + e^{ib} = e^{i\left(\frac{a+b}{2}\right)}\left(e^{i\left(\frac{a-b}{2}\right)} + e^{-i\left(\frac{a-b}{2}\right)}\right)$

Comment simplifier une expression complexe écrite sous forme d'un quotient

1) On peut écrire le numérateur et le dénominateur Sous forme exponentielle puis utiliser les propriétés de l'exponentielle
2) On peut aussi multiplier à la fois le numérateur et le dénominateur par la quantité conjugue du dénominateur
3) On peut combiner les deux méthodes précédentes

Exercice 3

1) Déterminer les racines carrées de a dans chacun des cas suivants $\theta \in \mathrm{R}$

$a = -5$, $a = 2i$, $a = -i$, $a = 2 + 2i\sqrt{3}$,$a = 8 + 6i$, $a = \cos^2(\theta) - 1$ et $a = 1 + 2ie^{io} - e^{i2\theta}$,

2) Déterminé de deux manière les racines carrées de $a = 1 + i$ puis déduire $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ et $sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$

Correction

$a = -5 = \left(i\sqrt{5}\right)^2$ Donc les racines carrées de a sont $i\sqrt{5}$ et $-i\sqrt{5}$

$a = 2i = (1+i)^2$ Donc les racines carrées de a sont $1 + i$ et $-1 - i$

$a = -i = \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^2$ Donc les racines carrées de a sont $\frac{1-i}{\sqrt{2}}$ et $-\frac{1-i}{\sqrt{2}}$

$a = 2 + 2i\sqrt{3} = 4e^{i\frac{\pi}{3}} = \left(2e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^2$ Donc les racines carrées de a sont $2e^{i\frac{\pi}{6}}$ et $-2e^{i\frac{\pi}{6}}$

$a = 8 + 6i = 9 + i^2 + 6i = (3+i)^2$ Donc les racines carrées de a sont $3 + i$ et $-3 - i$

Autrement

Soit $z = x + iy$.$(x, y) \in \mathrm{R}^2$ une racine carrée de $a \Leftrightarrow z^2 = 8 + 6i \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = |a| = 10 \\ x^2 - y^2 = \mathrm{Re}(a) = 8 \\ 2xy = \mathrm{Im}(a) = 6 \end{cases}$

$L_1 + L_2 \Rightarrow 2x^2 = 18 \Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow x = 3 \ ou \ x = -3$

$L_1 - L_2 \Rightarrow 2y^2 = 2 \Leftrightarrow y^2 = 1 \Leftrightarrow y = 1 \ ou \ y = -1$

$L_3 \Rightarrow x \ et \ y$ sont de même signe

Ainsi Donc les racines carrées de a sont $3 + i$ et $-3 - i$

$a = \cos^2(\theta) - 1 = -\sin^2(\theta) = \left(i\sin(\theta)\right)^2$ Donc les racines carrées de a sont $i\sin(\theta)$ et $-i\sin(\theta)$

$a = 1 + 2ie^{i\theta} + \left(ie^{i\theta}\right)^2 = \left(1 + ie^{i\theta}\right)^2$ Donc les racines carrées de a sont $1 + ie^{i\theta}$ et $-1 - ie^{i\theta}$

2) première méthode

$a = 1 + i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} = \left(\sqrt{\sqrt{2}}e^{i\frac{\pi}{8}}\right)^2$ Donc les racines carrées de a sont $\sqrt{\sqrt{2}}e^{i\frac{\pi}{8}}$ et $-\sqrt{\sqrt{2}}e^{i\frac{\pi}{8}}$

Deuxième méthode

Soit $z = x + iy$.$(x,y) \in \mathrm{R}^2$ une racine carrée de $a \Leftrightarrow z^2 = 1 + i \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = |a| = \sqrt{2} \\ x^2 - y^2 = \mathrm{Re}(a) = 1 \\ 2xy = \mathrm{Im}(a) = 1 \end{cases}$

$L_1 + L_2 \Rightarrow 2x^2 = \sqrt{2} + 1 \Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}}$ ou $x = -\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}}$

$L_1 - L_2 \Rightarrow 2y^2 = \sqrt{2} - 1 \Leftrightarrow y = \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}$ ou $y = -\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}$

$L_3 \Rightarrow x\ et\ y$ sont de même signe ainsi les racines carrées de a sont

$z_1 = \sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}$ et $z_2 = -\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}} - i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}$

Et comme $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) > 0$ donc $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{x}{r} == \frac{\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}}}{\sqrt{\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ et $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

Exercice 4

1) linéariser $\cos^5(x)$

2) Exprimer $\cos(3x)$ en fonction des puissances de $\cos(x)$

Correction

$$1)\ \cos^5(x) = \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}\left(e^{i5x} + 5e^{i4x}e^{-ix} + 10e^{i3x}e^{-ix} + 10e^{i2x}e^{-i3x} + 5e^{ix}e^{-i4x} + e^{-i5x}\right)$$

$$= \frac{1}{32}\left[e^{i5x} + e^{-i5x} + 5\left(e^{i3x} + e^{-i3x}\right) + 10\left(e^{ix} + e^{-ix}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{32}(2\cos(5x) + 10\cos(3x) + 20\cos(x)) = \frac{1}{16}\cos(5n) + \frac{5}{16}\cos(3x) + \frac{5}{8}\cos(x)$$

Rappel formule du binôme

Soit a et b deux réels et n un entier naturel supérieur ou égale.2 alors

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-1} b^k = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b \ldots\ldots\ldots\ldots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + C_n^n b^n$$

En particulier $(a+b)^5 = C_5^0 a^5 + C_5^1 a^4 b + C_5^2 a^3 b^2 + C_5^3 a^2 b^3 + C_5^4 a b^4 + C_5^5 b^5$

$$= a^5 + 5a^4 b + 10a^3 b^2 + 10a^2 b^3 + 5ab^4 + b^5$$

2) D'après la formule de Moivre on a

$\left(\cos(x) + i\sin(x)\right)^3 = \cos(3x) + i\sin(3x)$ Donc $\cos(3x) = \mathrm{Re}\left[\left(\cos(x) + i\sin(x)\right)^3\right]$ et comme

$\left(\cos(x) + i\sin(x)\right)^3 = \cos^3(x) + 3i\cos^2(x)\sin(x) - 3\cos(x)\sin^2(x) - i\sin^3(x)$ alors

$$\cos(3x) = \cos^3(x) - 3\cos(x)\sin^2(x) = \cos^3(x) - 3\cos(x)\left(1 - \cos^2(x)\right) = 4\cos^3(x) - 3\cos(x)$$

Exercice 5

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$

Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z dans chacun des cas suivants

1) $|z + i| = |z - 1|$

2) $\left|i\bar{z}+1\right| = |1+i\sqrt{3}|$

3) $z \neq -i \; et \; \frac{z-1}{z+i} \in \mathbb{R}$

4) $z = 2i + \cos(\theta)\ ,\theta \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

5) $z = 1 + 2t + i(1-t), t \in [0,+\infty[$

Correction

1) première méthode

Considérons les points A et B d'affixes respectives $1 \; et -i$

$|z+i| = |z-1| \Leftrightarrow |z_M - z_A| == |z_M - z_B| \Leftrightarrow AM = BM$ Alors l'ensemble des points M est la médiatrice de $[AB]$

Deuxième méthode Soit $z = x + iy, (x \cdot y) \in \mathbb{R}^2$

$$|z+i| = |z-1| \Leftrightarrow |x+iy+i| = |x+iy-1| \Leftrightarrow x^2 + (y+1)^2 = (x-1)^2 + y^2$$

$\Leftrightarrow y = -x$ Donc l'ensemble des points M est la droite d'équation $\Leftrightarrow y = -x$

2) $\left|i\bar{z}+1\right| = |1+i\sqrt{3}| \Leftrightarrow \left|\overline{i\bar{z}+1}\right| = 2 \Leftrightarrow |-iz+1| = 2$

$\Leftrightarrow |-i||z+i| = 2 \Leftrightarrow |z+i| = 2 \Leftrightarrow AM = 2$Donc l'ensemble des points M est le cercle de centre A et de rayon 2

3) Soit $z \neq -i$

Première méthode

$\frac{z+1}{z+i} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{aff(\overrightarrow{BM})}{aff(\overrightarrow{AM})} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \; et \; \overrightarrow{BM}$ sont colinéaires et $M \neq A$ Donc l'ensemble des points M est La droite (AB) privé de A

Deuxième méthode

$\frac{z+1}{z+i} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow\Leftrightarrow \arg\left(\frac{z_M - z_B}{z_M - z_A}\right) \in \mathbb{R}$ ou $M = B \Leftrightarrow \left(\widehat{\overrightarrow{AM},\overrightarrow{BM}}\right) = k\pi, k \in \mathbb{Z}$ ou $M = B$

Ainsi l'ensemble des points M est La droite (AB) privé de A

4) Soit $z = x + iy, (x \cdot y) \in \mathbb{R}^2$

$$z = 2i + \cos(\theta)\ ,\theta \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right] \Leftrightarrow \begin{cases} x = \cos\theta \\ y = 2 \end{cases} ,\theta \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right] \text{ or } \theta \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right] \Leftrightarrow \cos\theta \in [0,1]$$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in [0,1] \\ y = 2 \end{cases}$ Donc l'ensemble des points M est Le segment $[IJ]$ avec $I(2i)$ et $J(1+2i)$

5) Soit $z = x + iy, (x \cdot y) \in \mathbb{R}^2$

$$z = 1 + 2t + i(1-t), t \in [0,+\infty[\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 - t \end{cases}, t \in [0,+\infty[\Leftrightarrow \begin{cases} t = \dfrac{x-1}{2} \\ y = 1 - \dfrac{x-1}{2} \end{cases}, t \in [0+\infty[$$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ y = \frac{3-x}{2} \end{cases}$. Car $t \in [0,+\infty[\Leftrightarrow x \in [1,+\infty[$ Donc l'ensemble des points M est la demi-droite d'équation $\begin{cases} x \geq 1 \\ y = \frac{3-x}{2} \end{cases}$

Exercice 6

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$

Soit E l'ensemble des points M d'affixe non nul z tel que $z^3 \in \mathbb{R}_+^*$

1) Vérifier que les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = 1, z_B = -1 + i\sqrt{3}\ et\ z_c = -1 - i\sqrt{3}$ sont des points de E

2) Déterminé l'ensemble E

Correction

1) $z_A^3 = 1 \in \mathbb{R}_+^*$ donc $A \in E$

$z_B^3 = \left(2e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^3 = 8e^{i2\pi} = 8 \in \mathbb{R}_+^*$ donc $B \in E$

$z_c^3 = \left(\bar{z_B}\right)^3 = 8 \in \mathbb{R}_+^*$ donc $C \in E$

2) Soit $z \neq 0$

$M(z) \in E \Leftrightarrow \arg(z^3) = 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow 3\arg(z) = 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow ag(z) = \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$

Si $k = 3n, n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \arg(z) \equiv 0[2\pi] \Leftrightarrow M \in [0A)\backslash\{0\}$

Si $k = 3n+1, n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \arg(z) = \frac{2\pi}{3}[2\pi] \quad \Leftrightarrow M \in [OB)|\{\theta\}$

Si $k = 3n++2, n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \arg(z) \equiv -\frac{2\pi}{3}[2\pi] \Leftrightarrow M \in [0C)|\{\theta\}$

Ainsi l'ensemble $E = [0A)U[OB)U[0C)|\{0\}$

S'entrainer

Exercice 1

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$

1- On considère dans l'ensemble C l'équation E : $z^2 - 4iz - 2 + 2i\sqrt{3} = 0$

a- Vérifier que $a = 1 + i(2-\sqrt{3})$ est une solution de E

b- En déduire b l'autre solution de E

2- Montrer que $a^2 = 4(2-\sqrt{3})e^{i\frac{\pi}{6}}$. Déduire l'écriture exponentielle de a

3. On considère les points A , B et C d'affixe respectives a , b et $c = 2i + 2e^{i\frac{\pi}{7}}$. Soit Γ le cercle de diamètre $[AB]$

a- Déterminer ω l'affixe de Ω le centre de Γ

b- Montrer que O et C dont deux points de Γ . En déduire que $\frac{c-a}{c-5} \in i\mathbb{R}$

Exercice 2

On considère dans l'ensemble C l'équation E : $z^3 - (1+2i)z^2 + 3(1+i)z - 10(1+i) = 0$

1) Montrer que E admet une solution imaginaire

2)a) Déterminer les racines carrées de $5 - 12i$

b) Résoudre l'équation E

Exercice 3

On considère dans l'ensemble C l'équation E : $iz^3 + 3(1+i)z^2 + 6z + 10 - 2\mathrm{i} = 0$ et
F :$[iz + (1+i)]^3 = 8$

1) a) Montrer que E et F dont équivalentes

b) Résoudre alors E

2) Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ On considère les points A, B et C d'affixes respectives $-1 - i$, $\sqrt{3} - 1 + 2i$ et$-\sqrt{3} - 1 + 2i$

Γ L'ensemble des points $M(z) \in P$ tel que $|iz + (1+i)| = 2$

Montrer que Γ est le cercle circonscrit au triangle ABC

Exercice 4

Résoudre dans C les équations suivantes

$E_1 : (z - i)^n = (z + i)^n$. $E_2 : 1 + 2z + - \cdots + 2z^{n-1} + z^n = 0, n \in$ N*

Exercice 5

Dans l'ensemble C des nombres complexes, on considère Le polynôme :

$p(z) = z^4 + 3z^3 + \frac{9}{2}z^2 + 3z + 1$ et l'équation E :$p(z) = 0$

1) Comparer $p\left(\bar{z}\right)$ et $\overline{p(z)}$

2) Montrer que si z_0 est une solution de E, alors le complexe $\frac{1}{z_0}$ est aussi une solution de E

3) Déduire de ce qui procède que si z_0 est une solution de E , il en est de même pour $\bar{z_0}$, $\frac{1}{z_0}$ et $\frac{1}{\bar{z_0}}$

4) Vérifier que $a = -1 + i$ est une solution de E puis résoudre l'équation E

5) Factoriser $p(z)$ dans R

S'approfondir

Exercice 6

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ soit $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\setminus \left\{\frac{\pi}{4}\right\}$

1) On considère dans l'ensemble C l'équation E : $z^2 - \sqrt{2}e^{i\theta}z + e^{i2\theta} = 0$

a) Vérifier que $\Delta = \left(i\sqrt{2}e^{i\theta}\right)^2$ est le discriminant de E

b) Écrire sous forme exponentielle les solutions de E

2) On considère les points I , J , T_1,T_2 et A d'affixe respectives 1,-1,$e^{i\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)}$, $e^{i\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)}$ et $\sqrt{2}e^{i\theta}$

a) Montrer que les droites $(0A)$ et (T_1T_2) sont perpendiculaires

b) Soit K le milieu du segment $[T_1T_2]$, montrer que les points O , K et A sont alignés

c) En déduire que la droite (OA) est la médiatrice de $[T_1T_2]$

3) Soit R la rotation de centre T_1 et d'angle $\frac{\pi}{2}$

a) Soit $M(z)$ et $M'(z')$. Montrer que $R(M) = M' \Leftrightarrow z' - e^{i\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)} = i\left(z - e^{i\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)}\right)$

b) Déterminer l'affixe du pont B image de I par R

c) Montrer que les droites (IJ) et (AB) sont perpendiculaires

4) Déterminer l'affixe du point C image de A par la translation de vecteur $-\vec{v}$

5) Montrer que le point A est le milieu du segment $[BC]$

Exercice 7

On considère l'application f qui à tout nombre complexe z différent de 1, associe le nombre complexe

$$f(z) = \frac{2 - iz}{1 - z}$$

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$,A est le point d'affixe 1 et B celui d'affixe −2i

1. On pose $z = x + iy$ avec x et y réels.
   Écrire f(z) sous forme algébrique. En déduire l'ensemble des points M d'affixe z tels que f(z)soit un réel et représenter cet ensemble.

2. On pose z′=f(z)
   a. Vérifier que i n'a pas d'antécédent par f et exprimer, pour z′ différent de i, z en fonction de z′.

   b. M est le point d'affixe z (z différent de 1) et M′ celui d'affixe z′ (z′ différent de i).
   Montrer que $OM = \frac{CM'}{DM'}$ où C et D sont les points d'affixes respectives 2 et i.

   c. Montrer que, lorsque le point M décrit le cercle de centre O et de rayon 1 privé du point A, son image M′ appartient à une

   Droite fixe que l'on définira géométriquement.

Exercice 8

le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$,(on appelle A, B, C les points d'affixes respectives 1+2i, 1, 3i, et on considère la transformation f qui a tout point M d'affixe z fait correspondre le point $M' = f(M)$ d'affixe

$z' = \frac{(3+4i)z+5\bar{z}}{6}$

1. Déterminer les affixes des points A′, B′, C′ images de A, B, C par f. Placer ces 6 points.

2. On pose On pose $z = x + iy$ avec x et y réels. Déterminer en fonction de x et y la partie réelle et la partie imaginaire de z′.

3. Démontrer que l'ensemble des points invariants par f (c'est-à-dire tels que z′=z) est la droite Δ d'équation $y = \frac{x}{2}$
Tracer Δ. Que remarque-t-on ?

4. Démontrer que, pour tout point M du plan, le point M′ est sur la droite Δ.

5. Montrer que, pour tout complexe z on a , $\frac{z'-z}{z_A} = \frac{z+\bar{z}}{6} + i\frac{z-\bar{z}}{3}$. En déduire que $\frac{z'-z}{z_A}$ est réel

6. Que peut-on en déduire pour les droites (MM′) et (OA)?

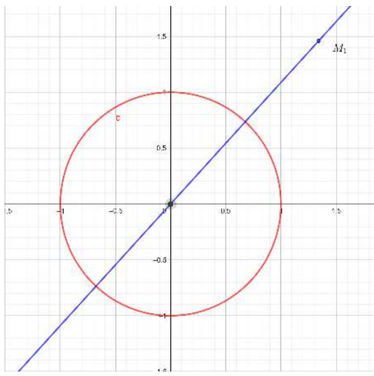
7. Comment peut-on construire M′ connaissant M (on distinguera suivant que M appartient ou non à Δ)?

Exercice 9

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(0, \vec{u} \cdot \vec{v})$

On considère l'application f qui à tout point M d'affixe z non nulle associe le point M' = f(M) d'affixe z' tel que : $z' = \frac{z}{|z|}(2 - |z|)$.

Le cercle C_1, de centre O et de rayon 1, est représenté sur la figure, donnée en annexe, que l'on complétera au fur et à mesure des questions.



Pour z complexe non nul, on note $z = re^{i\alpha}$, r étant le module de z et α un argument de z.

1. Montrer que $z' = (2 - r)e^{i\alpha}$.

2. Déterminer l'affixe a' du point A', image par f du point A d'affixe a = 3.

3. Soit B le point d'affixe$b = -\sqrt{3} + i$.

a. Écrire b sous forme exponentielle.

b. Déterminer l'affixe b' du point B', image du point B par f.

4. Placer A, B, A' et B' sur la figure.

5. a. Déterminer l'ensemble E des points M du plan privé du point O dont l'image par f est O.

b. Représenter E sur la figure.

6. Montrer que le cercle C_1 est l'ensemble des points M du plan distincts de O tels que f(M) =M.

7. Pour cette question, M est un point du plan, distinct de O, n'appartenant pas au cercle C_1.

On appelle I le milieu du segment [MM'] où M' est l'image de M par f.

a. Montrer que I appartient à C1.

b. Montrer que I appartient à la demi-droite [OM).

c. Sur la figure donnée est placé un point M_1. Construire le pointM_1', image par f du point M_1

Exercice 10

Soit m un nombre complexe différent de 1 , i et de -i.

I- Soit (E) l'équation d'inconnu z, où $z \in C$ $(\mathrm{E}) : z^2 - (1+i)(m+1)z + i(m^2+1) = 0$

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).

On pose $u = m + i$ et $v = 1 + im$

a- Montrer que $\frac{u}{v}$ est un réel si et seulement si $|m| = 1$

b- Montrer que $|u| + |v| \geq 2|m|$

3) Dans cette question on suppose que $|m| = 1$

a-Vérifier que $u^2 = m[(m - \overline{m}) + 2i]$

b- En déduire que $arg(u) \equiv \frac{1}{2}arg(m) + \frac{\pi}{4} + k\pi \, , k \in \mathbb{Z}$

II) le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(0, \vec{u}, \vec{v})$

1) On considère les points (a) , $B(b)$ et $C(c)$, a, b et c sont trois nombres complexe distincts

a- Montrer que C est l'image de B par la rotation de centre A et d'angle θ si et seulement si $c - a = e^{i\theta}(b - a)$

b- Montrer que $\left[(c-a) - e^{i\frac{\pi}{3}}(b-a)\right]\left[(c-a) - e^{i-\frac{\pi}{3}}(b-a)\right] = a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc$

c- En déduire que le triangle ABC est équilatéral si et seulement si $a^2 + b^2 + c^2 = ab + ac + bc$

d- On considère les points N(u) et N'(v) . Déterminer les valeurs de m pour lesquelles le triangle ONN' est équilatéral

2) Soit z un nombre complexe non nul on considère les points $M(z)$ et $M'(\bar{z})$. Déterminer l'ensemble E des points M tel que le triangle OMM' est équilatéral

Exercice 11

le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(0, \vec{u}, \vec{v})$

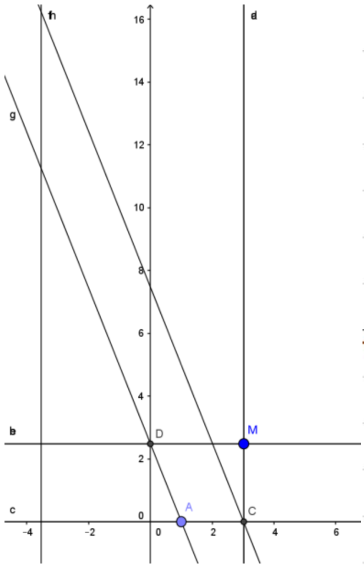
Soit f l'application de P dans P qui atout point M(z) associe le point M'(z') tel que $z' = z^2 - \bar{z}^2$

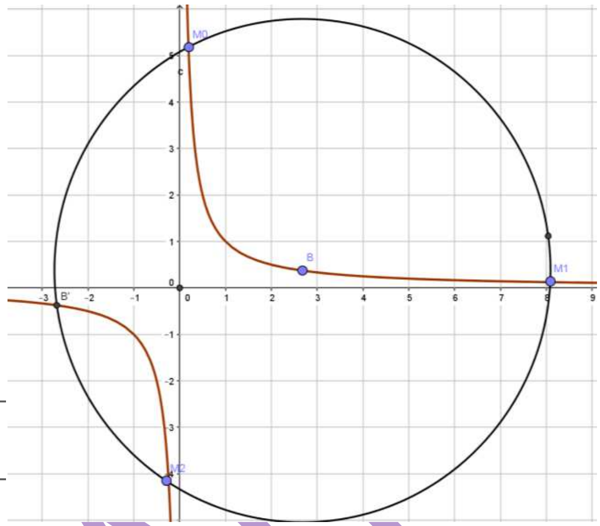
1. Sur la figure 1 on a placer les points M(z) et A(1)
   C et D sont les projetés orthogonaux de M respectivement sur $(0, \vec{u},)$ et $(0, \vec{v})$

   La parallèle a (AD) issue de C coupe $(0, \vec{v})$ en E

   a. On pose $z = x + iy$ déterminer l'écriture cartésienne de z'
   b. On suppose que $x > 0$ et $y > 0$ montrer que $OE = xy$
   c. Construire alors le point M'
2. Soit H l'ensemble des points M(z) tel que $z' = 4i$. Montrer que H est une hyperbole
3. Soit B(b) un point de H , B' est le symétrie de B par rapport a O et (C) le cercle de centre B et passant par B' Montrer que M(z) appartient a (C) si et seulement si $|z - b|^2 = 4b\bar{b}$

4. Le cercle (C) coupe H suivant trois points M_0, M_1 *et* M_2 autre que B' voir figure 2
   Soit M(z) un point de $H \cap (C)$ on pose $Z = z - b$
   a. Montrer que $Z^2 - \bar{Z}^2 + 2bZ - 2\bar{b}\bar{Z} = 0$
   b. Multiplions l'égalité Précédente par Z^2et montrer que $(Z + 2b)\left(Z^3 - 8b\bar{b}^2\right) = 0$
   c. Montrer alors que le triangle $M_0\ M_1\ M_2$ est équilatéral de centre B





Exercice 12

On se place dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct. $(O, \vec{u}, \vec{v})$

On note la suite (z_n) de nombres complexes, de terme initial $z_0 = e^{i\theta}$, $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, et telle que :
$z_{n+1} = \frac{z_n + |z_n|}{2}$, pour tout entier naturel n. On note M_n le point d'affixez_n .

1. Calculer l'affixe du point M_1 . Construire M_0 et M_1
2. On pose $z_n = r_n e^{i\theta_n}$, $r_n = |z_n|$ et θ_n un argument de z_n dans $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$
   a. Montrer que $\theta_n = \frac{\theta}{2^n}$ et $r_n = \frac{sin(\theta)}{2^n sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right)}$
   b. Déterminer la limite de r_n et la limite de θ_n

Exercice 13:

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation E : $z^2 + z - 1 = 0$

2) a)Déterminer ω_0 , ω_1 , ω_2, ω_3 et ω_4 les racines cinquième de l'unité

b) Vérifier que pour tout $k \in \{0,1,2,3,4\}$ on a $\omega_k = {\omega_1}^k$

c) Montrer que $S = \omega_0 + \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \omega_4 = 0$

3) soient $\alpha = \omega_1 + \omega_4$ et $\beta = \omega_2 + \omega_3$

a) Montrer que α et β sont les solutions de E

b) En déduire alors les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ et $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$

4) Le plan complexe est rapporté a un repère orthonormé $(o, \vec{u}, \vec{v})$.

a) Déterminer l'ensemble Γ des points $M(z)$ du plan tel que $z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}e^{i\theta}$, $\theta \in [0, 2\pi[$

b) Vérifier que le point $A(i)$ est un point de Γ puis construire Γ

c) Montrer que Γ coupe $(\mathrm{o}, \vec{\mathrm{u}})$ suivant deux points I et J d'affixes respectives $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ et $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$

5) En déduire une construction du pentagone régulier inscrit dans le cercle de centre O et de rayon 1 Dont l' un des sommet et le point d'affixe 1

Exercice 14

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$

On considère les points A et B d'affixes respectives $z_A = 1$ et $z_B = 2$

Et l'équation $E_\theta : iz^2 - 2(1 - cos\theta)z - 2cos(\theta) = 0$, $\theta \in \left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[$

1)a) Résoudre dans C l'équation E_θ

b) Déterminé la valeur de θ pour la quelle $z_1 = z_2$

2) Déterminé l'ensemble $\Gamma = \{M(z) \in p \; tel \; que \arg\left(\frac{z-2}{z}\right) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$

3) On considère les ponts M_1 et M_2 d'affixes respectives $z_1 = 1 + ie^{i\theta}$ et $z_2 = 1 + ie^{-i\theta}$

a) Déterminé l'écriture exponentielle de z_1 et z_2

b) Déterminé l'ensemble des points M_1 lorsque θ varie

4) Dans la suite on suppose que $M_1 \neq M_2$ et soit G le centre de gravité du triangle AM_1M_2

a) Montrer que $z_G = 1 + \frac{2}{3}icos(\theta)$ puis déduire l'ensemble des points G lorsque θ varie

b) Déterminé les valeurs de θ pour les quelles le triangle AM_1M_2 est rectangle et isocèle

c) Déterminé les valeurs de θ pour les quelles le triangle AM_1M_2 est équilatéral

Exercice 15

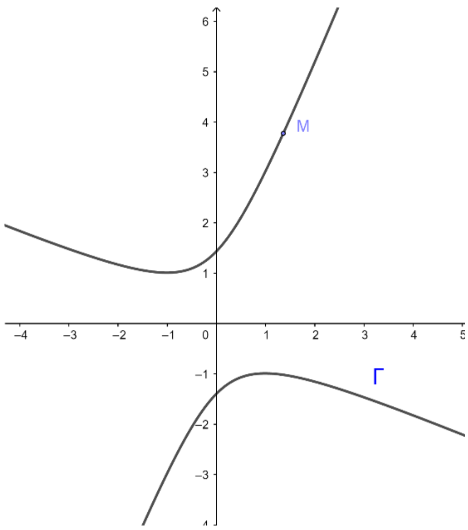
Le plan complexe est rapporté a un repère orthonormé $(\mathrm{o}, \vec{\mathrm{u}}, \vec{\mathrm{v}})$.

Soit m un nombre complexe et soi

t $(E_m) : z^2 - 2mz - 2(1 + i) = 0.$

On note $M(m)$, $N(2m)$, M_1et M_2 les points images

des solutions z_1 et z_2 de l'équation (E_m)



1) Résoudre l'équation (E_m) pour $m = i\sqrt{2}$. Montrer que le triangle OM_1M_2 est rectangle en O.
2) Soit Δ' le discriminant réduit de (E_m)
   On note (Γ) l'ensemble des points M tels $\overrightarrow{OM_1}$ est orthogonal a $\overrightarrow{OM_2}$.
   a) Montrer que $M \in \Gamma$ si et seulement si $|m|^2 = |\Delta'|$

b) En déduire qu'une équation de (Γ) est $x^2 - y^2 + 2xy + 2 = 0$.

3) Dans cette question on suppose que $z_1 \neq z_2$

Dans le graphique ci-dessous on a représenté la courbe (Γ) et M un point de (Γ) .

a) Montrer que le quadrilatère OM_1NM_2 est un rectangle.

b) Déterminer un procédé de construction des points , M_1et M_2 connaissant un argument de z_1.

Exercice 16

Soit l'application f du plan dans lui-même, qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe

. On pose A et B d'affixes respectives i et $-i$.$z' = \frac{z+iz\bar{z}}{1+z\bar{z}}$

1/ Montrer que f admet deux points invariants à déterminer.

2/ Montrer que pour tout nombre complexe z , les points A , M et M' alignés .

3/ Soit (Γ)le cercle de diamètre $[OB]$.

a) Montrer que pour tout point M du plan privé de O et B , on a : $arg(z') \equiv \frac{\pi}{2} + \left(\widehat{\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MO}}\right) [2\pi]$

b) En déduire que si M appartient (Γ) à alors le point M' appartient à une droite à préciser.

c) Donner une construction de M' connaissant M point de(Γ) .

4/ a) Montrer que $|z' - z| = |z' - i|$ si et seulement si M appartient au cercle trigonométrique(φ).

b) En déduire que si $M \in \varphi \setminus \{A\}$ alors M' est le milieu de $[AM]$.

c) Déterminer l'image(φ) de par f .

Correction

Exercice 1

1-a- On a $a^2 = 1 - (2 - \sqrt{3})^2 + 2i(2 - \sqrt{3}) = -6 + 4\sqrt{3} + 4i - 2i\sqrt{3}$ et $4ia = 4i - 8 + 4\sqrt{3}$ donc $a^2 - 4ia = 2 - 2i\sqrt{3}$ ainsi a est une solution de E

b. On a $a + b = \frac{4i}{1} = 4i$ donc $b = 4i - a = -1 + i(2 + \sqrt{3})$

2. a. Ω est le milieu de $[AB]$ donc $\omega = \frac{a+b}{2} = 2i$

b. $\Omega C = |c - \omega| = \left|2e^{i\frac{\pi}{7}}\right| = 2$ et comme $AB = |b - a| = \left|-2 + 2i\sqrt{3}\right| = 4$ alors le rayon de Γ est $\frac{AB}{2} = 2$ ainsi $C \in \Gamma$

$\Omega O = |w| = 2$ donc $O \in \Gamma$

$C \in \Gamma$ et $[AB]$ est un diamètre de Γ alors $\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{CB}$ dont orthogonaux et comme $\overrightarrow{BC} \neq \vec{0}$ alors $\frac{aff\left(\overrightarrow{AC}\right)}{aff\left(\overrightarrow{BC}\right)} \in i\mathbb{R}$ donc $\frac{c-a}{b-a} \in i\mathbb{R}$

Exercice 2

Soit $p(z) = z^3 - (1+2i)z^2 + 3(1+i)z - 10(1+i)$ et $z_0 = iy, y \in \mathrm{R}$

z_0 et un zéro de $P \Leftrightarrow p(z_0) = 0 \Leftrightarrow -iy^3 + (1+2i)y^2 + 3i(1+i)y - 10(1+i) = 0 \Leftrightarrow y^2 - 3y - 10 - i\left(y^3 + 2y + 3y - 10\right) = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} E_1 : y^2 - 3y - 10 = 0. \\ E_2 : y^3 + 2y^2 + 3y - 10 = 0 \end{cases}$ $E_1 \Leftrightarrow y = 5 \; ou \; y = -2$ et comme 5 ne vérifie pas E_2 donc $y = -2$ Ainsi $z_0 = -2i$

2)a) on peut remarquer que $5 - 12i = 3^2 + (2i)^2 - 2 \times 3 \times 2i = (3-2i)^2$ donc les racines carrées de $5 - 12i$ sont $3 - 2i$ et $-3 + 2i$

b) $-2i$ est une solution de E donc $P(z) = (z+2i)(z^2 + bz + c) = z^3 + bz^2 + cz + 2iz^2 + 2ibz + 2ic = z^3 + (b+2i)z + (c+2ib)z + 2ic$

Par indentification on obtient $\begin{cases} b + 2i = -1 - 2i \\ c + 2ib = 3 + 3i \\ 2ic = -10 - 10i \end{cases}$

$L_1 \Rightarrow b = -1 - 4i$ et $L_3 \Rightarrow c = -5 + 5i$ vérification dans L_2: $-5 + 5i - 2i + 8 = 3 + 3i$ (ok) . Ainsi $p(z) = (z+2i)(z^2 - (1+4i)z - 5 + 5i)$

$p(z) = 0 \Leftrightarrow z + 2i = 0$ ou $z^2 - (1+4i)z - 5 + 5i = 0$

$z + 2i = 0 \Leftrightarrow z = -2i$

$z^2 - (1+4i)z - 5 + 5i = 0$, $\Delta = (1+4i)^2 - 4(-5+5i) = 1 + 8i - 16 + 20 - 20i = 5 - 12i = (3-2i)^2$ donc $\delta = 3 - 2i$

Alors $z_1 = \frac{1+4i+3-2i}{2} = 2 + i$ et $z_2 = \frac{1+4i-3+2i}{2} = -1 + 3i$. $S_C = \{-2i, 2+i, -1+3i\}$

Exercice 3

1)a) $[iz + (1+i)]^3 = 8 \Leftrightarrow (iz)^3 + 3(iz)^2(1+i) + 3iz(1+i)^2 + (1+i)^3 = 8$

$\Leftrightarrow -iz^3 - 3(1+i)z^2 - 6z + 2i - 2 = 8 \Leftrightarrow iz^3 + 3(1+i)z^2 + 6z - 2i + 10 = 0$

b) $[iz + (1+i)]^3 = 8 \Leftrightarrow \left[\frac{iz+1+i}{2}\right]^3 = 1 \Leftrightarrow \frac{iz_k+1+i}{2} = e^{i\frac{2k\pi}{3}}, k \in \{0_1 1_1 2\}$

$\Leftrightarrow iz_k = 2e^{i\frac{2lk\pi}{3}} - 1 - i \Leftrightarrow z_k = -2ie^{i\frac{2k\pi}{3}} + i - 1, k \in \{0,1,2\}$

$z_0 = -1 - i$, $z_1 = -2ie^{i\frac{2\pi}{3}} + i - 1 = \sqrt{3} - 1 + 2i$, $z_2 = -2ie^{-i\frac{2\pi}{3}} + i - 1 = -\sqrt{3} - 1 + 2i$

$S_C = \{z_0, z_1, z_2\}$

2) $M(z) \in \Gamma \Leftrightarrow |iz + 1 + i| = 2 \Leftrightarrow |i||z - i + 1| = 2 \Leftrightarrow |z - i + 1| = 2$ donc Γ est le cercle de centre Ω d'affixe $i - 1$ et de rayon 2

Or $|iz_k + 1 + i| = \left|2e^{i\frac{2\pi}{3}}\right| = 2$ donc A,B et C sont trois points de Γ ainsi Γ est le cercle circonscrit au triangle ABC

Exercice 4

Remarquons d'abord que $z = i$ n'est pas une solution de E_1 ainsi

$E_1 \Leftrightarrow \left(\frac{z+i}{z-i}\right)^n = 1 \Leftrightarrow \frac{z+i}{z-i}$ est une racine nième de l'unité autre que 1 car $\frac{z+i}{z-i} \neq 1$

$$\Leftrightarrow \frac{z+i}{z-i} = e^{i\frac{2k\pi}{n}}, k \in \{1,2 \dots n-1\} \Leftrightarrow z+i = ze^{i\frac{2k\pi}{n}} - ie^{i\frac{2k\pi}{n}} \Leftrightarrow z_k = \frac{e^{i\frac{2k\pi}{n}}+1}{e^{i\frac{2k\pi}{n}}-1}$$

$$\Leftrightarrow z_k = \frac{e^{i\frac{k\pi}{n}}\left(e^{i\frac{k\pi}{n}}+e^{-i\frac{k\pi}{n}}\right)}{e^{i\frac{k\pi}{n}}\left(e^{i\frac{k\pi}{n}}-e^{-i\frac{k\pi}{n}}\right)} = \frac{2\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)}{2i\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)} == -i\cotan\left(\frac{k\pi}{n}\right), k \in \{1,2,\dots n-1\}$$

$$E_2 \Leftrightarrow 1+z+z^2+\dots+z^{n-1}+z(1+z+z^2+\dots+z^{n-1}) = 0$$

Remarquons que $z=1$ n'est pas une solution de E_2 ainsi

$$E_2 \Leftrightarrow \frac{1-z^n}{1-z} + z\frac{1-z^n}{1-z} = 0 \Leftrightarrow 1-z^n+z(1-z^n) = 0 \Leftrightarrow (1+z)(1-z^n) = 0$$

$$\Leftrightarrow z=-1 \text{ ou } z^n = 1 \text{ et } z \neq 1 \Leftrightarrow z=-1 \text{ ou } z = e^{i\frac{2e\pi}{n}}, k \in \{1.2 \dots n-1\}$$

Exercice 5

1) $\overline{P(z)} = \overline{z^4+3z^3+\frac{9}{2}z^2+3z+1} = \overline{z^4}+3\overline{z^3}+\frac{9}{2}\overline{z^2}+3\bar{z}+1$

$= \bar{z}^4+3\bar{z}^3+\frac{9}{2}\bar{z}^2+3\bar{z}+1 = p\left(\bar{z}\right)$

2) Soit z_0 une solution de E , $p(0) = 1 \neq 0$ donc $z_0 \neq 0$

$p\left(\frac{1}{z_0}\right) = \frac{1}{z_0^4}+\frac{3}{z_0^3}+\frac{9}{2}\frac{1}{z_0^2}+\frac{3}{z_0}+1 == \frac{1+3z_0+\frac{9}{2}z_0^2+3z_0^3+z_0^4}{z_0^4} = \frac{p(z_0)}{z_0^4} = 0$ donc $\frac{1}{z_0}$ est une solution de E

3) Soit z_0 est une solution de E comme $p\left(\bar{z_0}\right) = \overline{p(z_0)}$=0 donc $\bar{z_0}$ est une solution de E

D'autre part $\frac{1}{z_0}$ est une solution de E donc $\frac{1}{\bar{z_0}}$ est une solution de E

4) On a $(-1+i)^2 = -2i$ alors $(-1+i)^3 = 2i+2$ et $(-1+i)^4 = -4$

Donc $p(a) = -4+6i+6-9i-3+3i+1 = 0$ ainsi a est une solution de E et par suite

$\bar{a}, \frac{1}{a}$ et $\frac{1}{\bar{a}}$ dont des solutions de E et comme E est une équation de quatrième degré Donc elle admet au maximum quatre solution alors les solution de E sont $a, \bar{a}, \frac{1}{a}$ et $\frac{1}{\bar{a}}$

5) $p(z) = (z-a)\left(z-\bar{a}\right)\left(z-\frac{1}{a}\right)\left(z-\frac{1}{\bar{a}}\right)$

$= \left(z^2-\left(a+\bar{a}\right)z+|a|^2\right)\left(z^2-\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{\bar{a}}\right)+\frac{1}{|a|^2}\right) = (z^2+2z+2)\left(z^2+z+\frac{1}{2}\right)$

Exercise 6

1)a) $\Delta = b^2-4ac = \left(\sqrt{2}e^{i\theta}\right)^2-4e^{i2\theta} = 2e^{i2\theta}-4e^{i2\theta} = -2e^{i2\theta} = \left(i\sqrt{2}e^{i\theta}\right)^2$

b) $z_1 = \frac{\sqrt{2}e^{i\theta}+i\sqrt{2}e^{i\theta}}{2} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)e^{i\theta} = e^{i\frac{\pi}{4}}-e^{i\theta} = e^{i\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)}$

$z_2 = \frac{\sqrt{2}e^{i\theta}-i\sqrt{2}e^{i\theta}}{2} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)e^{i\theta} = e^{-i\frac{\pi}{4}}e^{i\theta} = e^{i\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)}$

2)a) $\frac{aff\left(\overrightarrow{T_1T_2}\right)}{aff\left(\overrightarrow{OA}\right)} = \frac{z_2-z_1}{z_A} == \frac{-2i\sqrt{2}e^{i\theta}}{\sqrt{2}e^{i\theta}} = -2i \in i\mathbb{R}$ donc $(T_1T_2) \perp (OA)$

b) $z_k = \frac{z_1+z_2}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\theta} = 2z_A$ donc $\overrightarrow{OK} = 2\overrightarrow{OA}$ alors O,K et A sont alignés

c) $(0A) \perp (T_1T_2)$ et $(0A)$ passe par le milieu de $[T_1T_2]$ donc (OA) est la médiatrice de $[T_1T_2]$

3) a) Soit $M \neq T_1$ $R_{\left(T_1,\frac{\pi}{2}\right)}(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} T_1M = T_1M'. \\ \left(\overrightarrow{T_1M},\overrightarrow{T_1M'}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |z-z_1| = |z'-z_1| \\ \arg\left(\frac{z'-z_1}{z-z_1}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left|\frac{z'-z_1}{z-z_1}\right| = 1 \\ \arg\left(\frac{z'-z_1}{z-z_1}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \frac{z^1-z_1}{z-z_1} = e^{i\frac{\pi}{2}} = i \Leftrightarrow z'-z_1 = i(z-z_1)$$

$$\Leftrightarrow z' - e^{i\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)} = i\left(z - e^{i\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)}\right)$$

Cette relation reste vraie si $M = T_1$car $R(T_1) = T_1$ et $z_1 - z_1 = i(z_1 - z_1)$

Conclusion $\forall M \in P,\ R(M) = M' \Leftrightarrow z' - e^{i\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)} = i\left(z - e^{i\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)}\right)$

b) $R(I) = B \Leftrightarrow z_B - e^{i\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)} = i\left(z_I - e^{i\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)}\right) \Leftrightarrow z_B = i + (1-i)e^{i\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)}$

$$= i + \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}e^{i\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)} = i + \sqrt{2}e^{i\theta}$$

c) $\frac{aff\left(\overrightarrow{AB}\right)}{aff\left(\overrightarrow{IJ}\right)} = \frac{z_B-z_A}{z_I-z_J} = \frac{i}{2} \in i\mathbb{R}$ donc $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{IJ}$

4) $t_{-\vec{v}}(A) = C \Leftrightarrow \overrightarrow{AC} = -\vec{v} \Leftrightarrow z_c - z_A = -i \Leftrightarrow z_c = z_A - i = \sqrt{2}e^{i\theta} - i$

5) $\frac{z_B+z_c}{2} = \frac{\sqrt{2}e^{i\theta}-i+\sqrt{2}e^{i\theta}+i}{2} = \sqrt{2}e^{i\theta} = z_A$ donc A est le milieu de $[BC]$

Exercice 7

1. $f(z) = \frac{2-iz}{1-z} = \frac{2-i(x+iy)}{1-(x+iy)} = \frac{2-ix+y}{1-x-iy} = \frac{(2+y-ix)\times(1-x+iy)}{(1-x-iy)(1-x+iy)} = \frac{(2+y)(1-x)+xy-(1-x)xi+(2+y)yi}{(1-x)^2+y^2}$

$$= \frac{(2+y)(1-x)+xy+(x2-x+2y+y2)i}{(1-x)^2+y^2} = \frac{2-2x+y+\left(x^2-x+2y+y^2\right)i}{(1-x)^2+y^2}$$

$$f(z) \text{ réel} \Leftrightarrow x^2 - x + 2y + y^2 = 0 \quad (x;y) \neq (1;0)$$

$$\Leftrightarrow \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + (y+1)^2 - 1 = 0. \quad (x;y) \neq (1;0)$$

$$\Leftrightarrow \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + (y+1)^2 = \frac{5}{4} \qquad (x;y) \neq (1;0$$

Le point M appartient donc au cercle de centre E d'affixe $\frac{1}{2} - i$ de rayon $\sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$ privé du point A.

2.a. Supposons qu'il existe un nombre complexe z tel que f(z)=i. On a alors :

$$f(z) = i \Leftrightarrow \frac{2-iz}{1-z} = i \Leftrightarrow 2-iz = i(1-z) \Leftrightarrow 2-iz = i-iz \Leftrightarrow 2 = i$$

. Ce qui est impossible. Par conséquent i n'a pas d'antécédent par f

Soit $z' \neq i$

$$z' = \frac{2-iz}{1-z} \Leftrightarrow z'(1-z) = 2-iz \Leftrightarrow z'-zz' = 2-iz \Leftrightarrow iz-zz' = 2-z'$$

$$\Leftrightarrow z(i-z') = 2-z' \Leftrightarrow z = \frac{2-z'}{i-z'}$$

b. $OM = |z| = \left|\frac{2-z^1}{i-z'}\right| = \frac{CM'}{DM'}$

. c. Lorsque M décrit le cercle de centre O et de rayon 1 privé du point A alors OM=1.

Par conséquent $\frac{CM'}{DM'} = 1$ soit M′C=M′D . Le point M′ appartient donc à la médiatrice du segment [CD]

Remarque : Dans cette question on a prouvé que l'image du cercle de centre O et de rayon 1 privé du point A est inclue dans la médiatrice du segment [CD] Pour prouver l'égalité on doit étudier la réciproque C'est à dire on prouve que lorsque M'décrit la médiatrice de [CD] Le point M décrit le cercle de centre O et de rayon 1 privé du point A

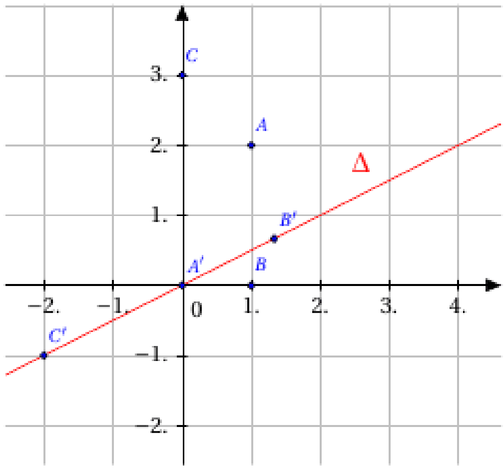
Lorsque M'décrit la médiatrice de $[CD]$ alors $CM' = DM'$ donc $|z'-2| = |z'-i|$ or $z' \neq i$ ainsi $\left|\frac{2-z^1}{i-z'}\right| = 1$ Par conséquent $|z| = 1$ et $z \neq 1$ il en résulte $OM = 1$ et $M \neq A$

Et par suite le point M décrit le cercle de centre O et de rayon 1 privé du point A

Exercice 8

1. $f(1+2i) = \frac{(3+4i)(1+2i)+5(1-2i)}{6} = \frac{3+6i+4i-8+5-10i}{6} = 0$

$f(1) = \frac{3+4i+5}{6} = \frac{4+2i}{3}$. $f(3i) = \frac{(3+4i)(3i)-15i}{6} = \frac{9i-12-15i}{6} = -2-i$



2. $z' = \frac{(3+4i)(x+iy)+5(x-iy)}{6} = \frac{3x+3iy+4ix-4y+5x-5iy}{6} = \frac{8x-4y+(4x-2y)i}{6} = \frac{4x-2y+(2x-y)i}{3}$.

Par conséquent $Re(z') = \frac{4x-2y}{3}$ et $Im(z') = \frac{2x-y}{3}$

3.

$$z = z' \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{4x-2y}{3} \\ y = \dfrac{2x-y}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = 4x-2y \\ 3y = 2x-y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y \\ 4y = 2x \end{cases} \Leftrightarrow y = \frac{x}{2}$$

L’ensemble des points invariants est donc la droite Δ.
Les points A′, B′ et C′ semblent appartenir à cette droite.

4. $Re(z') = \frac{4x-2y}{3} = 2\frac{(2x-y)}{3} = 2Im(z')$. Donc M′∈Δ.

5. $\frac{z'-z}{z_A} = \frac{\frac{(3+4i)z+5\bar{z}}{6}-z}{1+2i} = \frac{(3+4i)z+5\bar{z}-6z}{6(1+2i)} = \frac{(-3+4i)z+5\bar{z}}{6(1+2i)}\frac{1-2i}{1-2i} = \frac{(5+10i)z+(5-10i)\bar{z}}{6\times5}$

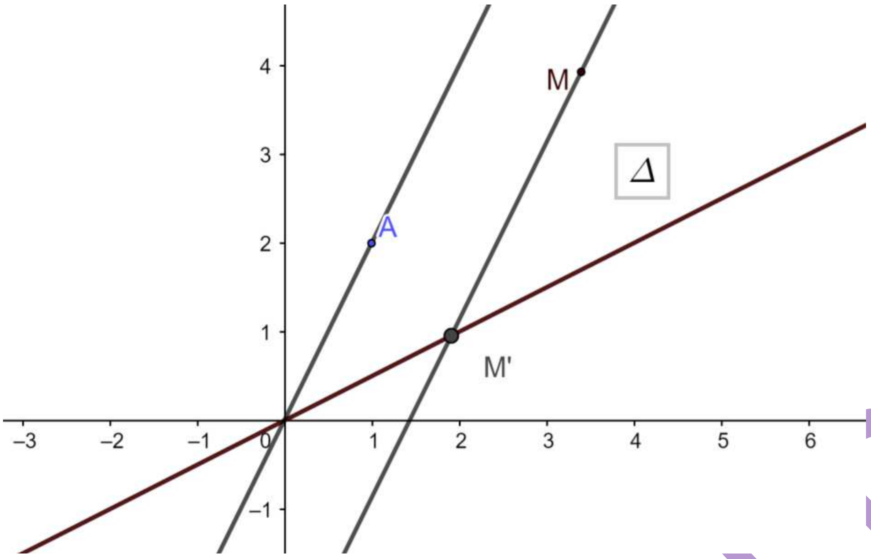
$= \frac{5(z+\bar{z})}{30} + i\frac{10(z-\bar{z})}{30} = \frac{z+\bar{z}}{6} + i\frac{z-\bar{z}}{3}$

$z+\bar{z} = 2Re(z)$ et $i(z-\bar{z}) = -2Im(z)$. Par conséquent $\frac{z'-z}{z_A}$ est un réel.

6. $\frac{z^1-z}{z_A} = \frac{z'-z}{z_A-z_O} = \frac{Aff(\overrightarrow{MM'})}{Aff(\overrightarrow{OA})}$ Est un réel.

Par conséquent les vecteurs $\overrightarrow{MM'}$ et $\overrightarrow{OA}$ sont colinéaires et les droites (MM’)et (OA) sont parallèles.

7. Si M n’appartient pas à Δ alors le point M′ est dont le point d’intersection de la droite Δ et de la droite parallèle à (OA)passant par M. Si M appartient à Δ alors M=M′.



Exercice 9

On a $|z| = r$ donc $z' = \frac{re^{i\theta}}{r}(2-r) = (2-r)e^{i\theta}$

On a $a' = \frac{a}{|a|}(2-|a|) = -1$

a. $-\sqrt{3}+i = 2\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right) = 2e^{i\frac{5\pi}{6}}$

b. On a $r = 2$ et $\theta \equiv \frac{5\pi}{6}[2\pi]$ slots d'après 1) $b' = (2-2)e^{i\frac{5\pi}{6}} = 0$

4. Soit M d'affixe $z \neq 0$,

$z \neq 0$ alors z s'ecrit sous la forme $re^{i\theta}$, $r > 0$

$f(M) = O \Leftrightarrow (2-r)e^{i\theta} = 0 \Leftrightarrow 2-r = 0 \Leftrightarrow r = 2 \Leftrightarrow OM = 2$

Alors E est le cercle de centre O et de rayon 2

Soit M d'affixe $z \neq 0$,

$z \neq 0$ alors z s'ecrit sous la forme $re^{i\theta}$, $r > 0$

$f(M) = M \Leftrightarrow re^{i\theta} = (2-r)e^{i\theta} \Leftrightarrow r = 2-r \Leftrightarrow r = 1 \Leftrightarrow OM = 1 \Leftrightarrow M \in C_1$

a. $z_I = \frac{z+z'}{2} = \frac{re^{i\theta}+(2-r)e^{i\theta}}{2} = e^{i\theta}$ donc $OI = |z_I| = 1$ ainsi $I \in C_1$

b. $aff\left(\vec{OI}\right) = e^{i\theta}$et $aff\left(\vec{OM}\right) = re^{i\theta}$donc $\vec{OM} = r\vec{OI}$ et comme $r > 0$ Alors $\vec{OM}$et $\vec{OI}$ sont colinéaires et de même sens ainsi $I \in [0M)$

c. La demi droite $[0M_1)$ coupe C_1 en I_1 le milieu de $[M_1M_1']$ et par suite $M_1{}' = S_{I_1}(M_1)$

Exercice 10

1. $\begin{cases} a = 1. \\ b = -(1+i)(m+1) \\ c = i(m^2+1). \end{cases}$ Donc $\Delta = b^2 - 4ac = (1+i)^2(m+1)^2 - 4i(m^2+1) = 2i(m+1)^2 -$
$4i(m^2+1) = -2i(2m^2+1-m^L-2m-1) = (m-i)^L(m-1)^2$

Alors $\delta = (1-i)(m-1)$ ainsi $z_1 = \frac{-b-\delta}{2a} = 1 + im$ et $z_2 = \frac{-b+\delta}{2a} = m + i$ $S_C = \{1+im, m+i\}$

2. a. Soit $m \in C\backslash\{1, i, -i\}$ $\frac{u}{v} = \frac{m+i}{1+im} = \frac{(m+i)\left(1-i\bar{m}\right)}{|1+im|^2} = \frac{m-im\bar{m}+i+\bar{m}}{|1+im|^2} == \frac{2\mathrm{Re}(m)+i(1-|m|^2)}{|1+im|^2}$ donc $\frac{u}{U} \in IR \Leftrightarrow$
$1 - |m|^2 = 0 \Leftrightarrow |m| = 1$

$2^{ième}$ $méthode$ $\frac{U}{V} \in IR \Leftrightarrow \overline{\left(\frac{u}{v}\right)} = \frac{u}{v} \Leftrightarrow \frac{\bar{u}}{\bar{v}} = \frac{u}{v} \Leftrightarrow u\bar{v} = \bar{u}v \Leftrightarrow (m+i)\left(1-i\bar{m}\right) =$
$\left(\bar{m}-i\right)(1+\mathrm{im}) \Leftrightarrow m - im\bar{m} + i + \bar{m} = \bar{m} + i\bar{m}m - i + m \Leftrightarrow 2i|m|^2 = 2i \Leftrightarrow |m| = 1$

$3^{ième}methode$ $\frac{u}{v} = \frac{m+i}{i(n-i)} = -i\frac{m+i}{m-i}$. Considérons les point $M(m), I(i)$ et $J(-i)$

$\frac{U}{V} \in \mathrm{R} \Leftrightarrow \frac{m+i}{n-i} \in i\mathrm{R} \Leftrightarrow \frac{aff\left(\overrightarrow{JM}\right)}{aff(\overrightarrow{IM})} \in i\mathrm{R} \Leftrightarrow \overrightarrow{JM} \perp \overrightarrow{IM} \Leftrightarrow M \in C_{[IJ]} = C_{(O,1)} \Leftrightarrow |m| = 1$

b. $|u| + |v| = |m+i| + \left|i(m-i) = |m+i| + |i||m-i|\right|$

$= |m+i| + |\mathrm{m}-i| \geq |m+i+m-i|$ donc $|u| + |v| \geq 2|m|$

3.a. $u^2 = (\mathrm{m}+i)^2 = m^2 + 2im - 1 = m^2 + 2im - m\bar{m} == m\left[\left(m-\bar{m}\right) + 2i\right]$

b. Soit $m = x + iy$, $(x, y) \in \mathrm{R}^2$

On a $u^2 = m[2i\,\mathrm{y} + 2i] = 2im(\mathrm{y}+1)$ et comme $|m| = 1$ et $m \neq i, m \neq -i$

alors $-1 < y < 1$

Donc $y + 1 > 0$ ainsi $\arg(u^2) \equiv \arg(im)[2\pi] \equiv \arg(i) + \arg(m)[2\pi] \equiv \frac{\pi}{2} + \theta[2\pi]$

D'où $2\arg(u) = \frac{\pi}{2} + \theta + 2k\pi, k \in \mathrm{Z}$ et par suite $\arg(u) = \frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathrm{Z}$

Autrement : $|m| = 1$et $m \in \mathrm{C}|\{1, i, -i\}$ donc il existe $\theta \in]0,2\pi[| \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right\}$ tel que $m = e^{i\theta}$

$u = e^{i\theta} + i = e^{i\theta} + e^{i\frac{\pi}{2}} = e^{i\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}\left(e^{i\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)} + e^{-i\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}\right) = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)e^{i\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}$

Si $2\cos\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right) > 0$ alors $\arg(u) = \frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2} + 2k\pi, k \in \mathrm{Z}$

Si. $2\cos\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right) < 0$ alors $\arg(u) = \frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2} + \pi + 2k\pi, k \in \mathrm{Z}$

Par conséquent $\arg(u) = \frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2} + k\pi, k \in \mathrm{Z}$

II) 1.a. $R_{(A,\theta)}(B)=C \Leftrightarrow \begin{cases} AB=AC \\ \left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)\equiv\theta[2\pi]\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}|b-a|=|c-a|\\ \arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right)\equiv\theta[2\pi]\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left|\frac{c-a}{b-a}\right|=1\\ \arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right)\equiv\theta[2\pi]\end{cases}$

$$\Leftrightarrow \frac{c-a}{b-a}=e^{i\theta}\Leftrightarrow c-a=e^{i\theta}(b-a)$$

b. $\left[(c-a)-e^{i\frac{\pi}{3}}(b-a)\right]\left[(c-a)-e^{i-\frac{\pi}{3}}(b-a)\right]$

$=(c-a)^2+(b-a)^2-\left(e^{i\frac{\pi}{3}}+e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)(b-a)(c-a)$

$=c^2+a^2-2ac+a^2+b^2-2ab-bc+ab+ac-a^2=a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc$

c. ABC est un triangle équilatéral $\Leftrightarrow R_{\left(A,\frac{\pi}{3}\right)}(B)=C$ ou $\Leftrightarrow R_{\left(A,-\frac{\pi}{3}\right)}(B)=c$

$\Leftrightarrow c-a=e^{i\frac{\pi}{3}}(b-a)$ ou $c-a=e^{-i\frac{\pi}{3}}(b-a)$

$\Leftrightarrow\left[(c-a)-e^{i\frac{\pi}{3}}(b-a)\right]\left[(c-a)-e^{i-\frac{\pi}{3}}(b-a)\right]=0$

$\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc=0\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2=ab+ac+bc$;

$\left(e^{i\frac{\pi}{3}}+e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)=2\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=1$

d. ONN' est un triangle équilatéral $\Leftrightarrow u^2+v^2=u\cdot v$ $(a=u,\ \ b=v,\ \ c=0)$

$\Leftrightarrow\ (m+i)^2+(1+im)^2=(m+i)(1+im)\Leftrightarrow m^2+2im-1+1-m^2+2im=m+im^2+i-\mathrm{m}$

$\Leftrightarrow 4im=im^2+i\Leftrightarrow 4m=m^2+1\Leftrightarrow m^2-4m+1=0\Leftrightarrow m=2+\sqrt{3}$ ou $m=2-\sqrt{3}$.

2. Soit z un nombre complexe non nul OMM' est un triangle équilatéral $\left(a=z,b=\bar{z},c=0\right)$

$\Leftrightarrow z^2+\bar{z}^2=z\bar{z}$ soit $z=x+iy$, $(x,y)\in\mathrm{R}^2\backslash\{(0,0)\}\Leftrightarrow 2(x^2-y^2)=x^2+y^2$

$\Leftrightarrow 3y^2=x^2\Leftrightarrow y=\frac{\sqrt{3}}{3}x$ ou $y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x$ avec $(x,y)\neq(0,0)$ alors l'ensemble $E=\Delta_1 v\Delta_2\backslash\{O\}$

Δ_1 est la droite d'équation $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x$ et Δ_2 est la droite d'équation $y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x$

Exercice 11

1.a. $z'=\left(z+\bar{z}\right)\left(z-\bar{z}\right)=4ixy$

b. Dans le triangle OCE on a $A\in[0C]\,,D\in[0E]\ et\ (AD)//(CE)$ alors d'après le théorème de Thales on a $\frac{OA}{OC}=\frac{OD}{OE}$ donc $OE=\frac{OA\cdot OC}{OE}=xy$

c. $z_{M'}=4ixy$ et $z_E=ixy$ donc $\overrightarrow{OM'}=4\overrightarrow{OE}$

2. $z' = 4i \Leftrightarrow 4ixy = 4i \Leftrightarrow y = \frac{1}{x}$ alors E est l'hyperbole d'équation $y = \frac{1}{x}$

3. Le cercle C de centre B et de rayon $BB^1 = 2OB$ car B' est le symétrie de B par rapport a O

$M(z) \in C \Leftrightarrow OM = 2OB \Leftrightarrow |z - b| = 2|b| \Leftrightarrow |z - b|^2 = 4|b|^2 = 4b\bar{b}$

4.a. On a $M \in H$ donc $z^2 - \bar{z}^2 = 4i$ or $Z = z + b \Leftrightarrow (z + b)^2 - \left(\bar{z} + \bar{b}\right)^2 = 4i$

$\Leftrightarrow Z^2 + 2bZ + b^2 - \bar{Z}^2 - \bar{b}^2 - 2\bar{b}\bar{Z} = 4i$ or $B \in H$ donc $b^2 - \bar{b}^2 = 4i$

Alors $Z^2 + 2bZ - \bar{Z}^2 - 2\bar{b}\bar{Z} = 0$

b. Si on multiplie par Z^2 on obtient $Z^4 + 2bZ^3 - \left(Z\bar{Z}\right)^2 - 2\bar{b}\bar{Z}Z^2 = 0$ et comme $M \in C$

Alors $|z - b|^2 = 4b\bar{b}$ donc $|Z|^2 = 4b\bar{b}$ ainsi $Z\bar{Z} = 4b\bar{b}$ il en résulte $Z^4 + 2bZ^3 - 16b^2\bar{b}^2 - 8b^2\bar{b}Z = 0$

Ce qui implique $Z^3(Z + 2b) - 8b^2\bar{b}(Z + 2b) = 0$ d'où $(Z + 2b)\left(Z^3 - 8b^2\bar{b}\right) = 0$

c. $(Z + 2b)\left(Z^3 - 8b^2\bar{b}\right) = 0 \Leftrightarrow Z + 2b = 0$ ou $Z^3 = 8b\bar{b}^2$

$Z = 2b \Leftrightarrow z = b$ donc $M = B$

$Z^3 = 8b\bar{b}^2$ or $8b\bar{b}^2 \neq 0$ donc les images des solutions de cette équation forme un triangle équilatéral De centre O.

Soit Z_0,Z_1 et Z_2 les solutions de cette équation et concèderons Les ponts $N_0(Z_0)$,$N_1(Z_1)$ et $N_2(Z_2)$

On a $Z_k - z_k = b$ pour tout $k \in \{0,1,2\}$ Donc $\overrightarrow{M_kN_k} = \vec{u}$ où $\vec{u}$ est le vecteur d'affixe b

Alors $M_k = t_{-\vec{u}}(N_k)$ et comme $N_0N_1N_2$ est un triangle équilatéral de centre O donc $M_0M_1M_2$ est un triangle équilatéral de centre $t_{-\vec{u}}(B) = O$

Exercice 12

1) $z_0 = e^{i\theta}$ donc $\begin{cases} OM_0 = 1 \\ \left(\vec{u}, \overrightarrow{OM_0}\right) = \theta[2\pi] \end{cases}$

$z_1 = \frac{z_0 + |z_0|}{2} = \frac{e^{i\theta} + 1}{2} = \frac{z_{M_0} + z_A}{2}$ A et le point d'affixe 1 ainsi M_1 est le milieu de $[AM_0]$

2) a) $z_{n+1} = \frac{z_n + |z_n|}{2} = r_n \frac{1 + e^{i\theta_n}}{2} = r_n \cos\left(\frac{\theta_n}{2}\right) e^{i\frac{\theta_n}{2}}$

Par récurrence

$\theta_0 = \theta = \frac{\theta}{2^0}$ et $r_0 = \frac{\sin(\theta)}{2^0 \sin\left(\frac{\theta}{2^0}\right)} = 1$ (Ok)

Soit p un entier naturel donné tel que $\theta_p = \frac{\theta}{2^p}$ et $r_p = \frac{\sin(\theta)}{2^P S_n\left(\frac{\theta}{2^p}\right)}$

Montrons que $\theta_{p+1} = \frac{\theta}{2^{P+1}}$ et $r_{p+1} = \frac{\sin(\theta)}{2^{P+1} sin\left(\frac{\theta}{2^{p+1}}\right)}$

On a $z_{p+1} = r_p \cos\left(\frac{\theta_p}{2}\right) e^{i\left(\frac{\theta_p}{2}\right)}$ et comme $\theta_p \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ donc

$\cos\left(\frac{\theta p}{2}\right) > 0$ Alors $\theta_{p+1} = \frac{\theta_p}{2} = \frac{\frac{\theta}{2^p}}{2} = \frac{\theta}{2^{p+1}}$

Et $r_{p+1} = r_p \cos\left(\frac{\theta p}{2}\right) = r_p \cdot \cos\left(\frac{\theta}{2^{p+1}}\right) = \frac{\sin(\theta)}{2^P \sin\left(\frac{\theta}{2^p}\right)} \cos\left(\frac{\theta}{2^{p+1}}\right)$

Et comme $\sin\left(\frac{\theta}{2^p}\right) = \sin\left(2 \cdot \quad \frac{\theta}{2^{p+1}}\right) = 2\sin\left(\frac{\theta}{2^{p+1}}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2^{p+1}}\right)$

Alors $r_{p+1} = \frac{\sin(\theta)}{2^{P+1} sin\left(\frac{\theta}{2^{p+1}}\right)}$

Conclusion pour tout $n \in$ N on a $\theta_n = \frac{\theta}{2^n}$ et $r_n = \frac{sin(\theta)}{2^n sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right)}$

b) $\frac{1}{2} \in]-1,1[$ donc $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{\theta}{2^n}\right) = 0$

$r_n = \frac{sin(\theta)}{\theta \frac{sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right)}{\frac{\theta}{2^n}}}$ or $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{\theta}{2^n}\right) = 0$ et $\lim_{x \to 0} \frac{sin(x)}{x} = 1$ alors $\lim_{n \to +00} \frac{sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right)}{\frac{\theta}{2^n}} = 1$ ainsi $\lim_{n \to +\infty} r_n = \frac{\sin(\theta)}{\theta}$

Exercice 13

1. $\triangle = 1 + 4 = 5$ donc $z_1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ et $z_2 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$
2. a. Les racine cinquièmes de l'unité sont les $\omega_k = e^{i\frac{2k\pi}{5}}$, $k \in \{0,1.2,3,4\}$

Ainsi $\omega_0 = 1$, $\omega_1 = e^{i\frac{2\pi}{5}}$, $\omega_2 = e^{i\,\frac{4\pi}{5}}$, $\omega_3 = e^{-i\frac{4\pi}{5}}$ et $\omega_4 = e^{-i\frac{2\pi}{5}}$

b. $\omega_k = e^{i\frac{2k\pi}{5}} = \left(e^{i\frac{2\pi}{5}}\right)^k = (\omega_1)^k$

c. $S = \omega_0 + \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \omega_4 = \omega_0 + \omega_1 + (\omega_1)^2 + (\omega_1)^3 + (\omega_1)^4$

$\omega_1 S = \omega_1 + \omega_1^2 + \omega_1^3 + \omega_1^4 + \omega_1^5$ donc $S - \omega_1 S = \omega_0 - \omega_1^5 = 0$ car w_1 est une racine cinquième de l'unité alors $\omega_1^5 = 1$

Ainsi $S(1 - \omega_1) = 0$ et comme $\omega_1 \neq 1$ donc $S = 0$

3.a. On a $\alpha^2 + \alpha - 1 = \omega_1^2 + \omega_4^2 + 2\omega_1\omega_4 + \omega_1 + \omega_4 - 1$ or $\omega_4 = \omega_1^4$

Alors $\alpha^2 + \alpha - 1 = \omega_1^2 + \omega_1^8 + 2\omega_1^5 + \omega_1 + \omega_1^4 - 1 = \omega_1^2 + \omega_1^3 + \omega_1 + \omega_1^4 + 1 = S = 0$

Remarque $\omega_1^8 = \omega_1^5\omega_1^3 = \omega_1^3$ car $\omega_1^5 = 1$. Donc α est une solution de E

$\beta^2+\beta-1=\omega_2^2+\omega_3^2+2\omega_2\omega_3+\omega_2+\omega_3-1$ or $\omega_2=\omega_1^2$ et $\omega_3=\omega_1^3$

donc $\beta^2+\beta-1=\omega_1^4+\omega_1^6+2\omega_1^5+\omega_1^2+\omega_1^3-1=\omega_1+\omega_1^2+\omega_1^3+\omega_1^4+1=S=0$

Alors β est une solution de E

Autrement

D'une part on a. $\alpha+\beta=S-1=-1=-\frac{b}{a}$

D'autre part on a $\alpha\beta=(\omega_1+\omega_4)(\omega_2+\omega_3)=\omega_1\omega_2+\omega_1\omega_3+\omega_4\omega_2+\omega_4\omega_3$

$=\omega_1^3+\omega_1^4+\omega_1^6+\omega_1^7=\omega_1^3+\omega_1^4+\omega_1+\omega_1^2=S-1=-1=\frac{c}{a}$

Ainsi α et β dont les solutions de E

b. $\alpha=\omega_1+\omega_4=e^{i\frac{2\pi}{5}}+e^{-i\frac{2\pi}{5}}=2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$

$\beta=\omega_2+\omega_3=e^{i\frac{4\pi}{5}}+e^{-i\frac{4\pi}{5}}=2\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$ et comme $\{\alpha,\beta\}=\left\{\frac{-1+\sqrt{5}}{211},\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right\}$ et $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)>0$ donc $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)=\frac{\alpha}{2}=\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$ et $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)=\frac{\beta}{2}=\frac{-1-\sqrt{5}}{4}$

4.a. $z=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}e^{i\theta}\Leftrightarrow z+\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{5}}{2}e^{i\theta}\Leftrightarrow\begin{cases}\left|z+\frac{1}{2}\right|=\frac{\sqrt{5}}{2}\\ \arg\left(z+\frac{1}{2}\right)\equiv\theta\equiv[2\pi]\end{cases},\theta\in[0,2\pi[\Leftrightarrow$ $\begin{cases}HM=\frac{\sqrt{5}}{2}\\ \left(\vec{u},\overrightarrow{HM}\right)\Xi\theta[2\pi]\end{cases},\theta\in[0,2\pi[\Leftrightarrow\Gamma=C_{\left(H,\frac{\sqrt{5}}{2}\right)}$ ou H est le point d'affixe $-\frac{1}{2}$

b. $HA=\left|i+\frac{1}{2}\right|=\sqrt{1+\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{5}}{2}$ alors $A\in\Gamma$

c. Soit M d'affixe z un point de $\Gamma\cap\left(0,\vec{u}\right)\Leftrightarrow\begin{cases}\left|z+\frac{1}{2}\right|=\frac{\sqrt{5}}{2}\\ z\in\mathbb{R}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}z=x\quad,x\in\mathbb{R}\\ \left|z+\frac{1}{2}\right|=\frac{\sqrt{5}}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\left|x+\frac{1}{2}\right|=\frac{\sqrt{5}}{2}\Leftrightarrow$ $\left|x+\frac{1}{2}\right|=\frac{\sqrt{5}}{2}\Leftrightarrow\left(x+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{4}x+\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{5}}{2}$ ou $x+\frac{1}{2}=-\frac{\sqrt{5}}{2}$

$\Leftrightarrow x=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}$ ou $x=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}$

Autrement : H le centre de Γ appartient a $\left(0,\vec{u}\right)$ donc Γ coupe $\left(0,\vec{u}\right)$ suivant deux point I et J et comme $H\in[IJ]$ donc $\left(\vec{u},\overrightarrow{HI}\right)\equiv0[2\pi]$ et $\left(\vec{u},\overrightarrow{HJ}\right)\equiv\pi[2\pi]$

Ainsi $z_I=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}e^{i0}=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}$ et $z_j=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}e^{i\pi}=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{5}}{2}$

5. Soit $A_k(\omega_k)$, $k\in\{0,1,2,3,4\}$ alors $A_0A_1A_2A_3A_4$ est un pentagone régulier inscrit dans le cercle trigonométrique C

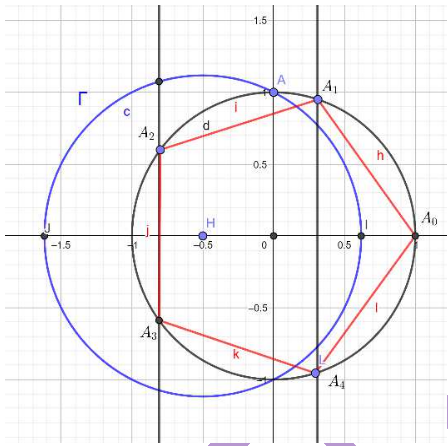
Construction

Soit Δ_1 la médiatrice de $[0I]$ et Δ_2 la médiatrice de $[0J]$ alors $\Delta_1 : x = \frac{x_O+x_I}{2} = \frac{-1+\sqrt{5}}{4} = \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$

alors $\Delta_1 \cap C = \{A_1, A_4\}$

$\Delta_2 : x = \frac{x_0+x_J}{2} == \frac{-1-\sqrt{5}}{4} = \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$

donc $\Delta_2 \cap C = \{A_3, A_2\}$



Exercice 14

1) On a $\begin{cases} a = i. \\ b = -2(1-\cos\theta) \\ c = -2\cos\theta. \end{cases}$ Donc

$\Delta' = (i-\cos\theta)^2 + 2i\cos\theta = \cos^2(\theta) - 1 = -\sin^2(\theta) = (i\sin\theta)^2$

Alors Les solution de E_θ sont $z' = \frac{i-\cos\theta+imo}{i} == 1 - \frac{\cos\theta - i\sin\theta}{i} = 1 + ie^{-i\theta}$

et $z_2 = \frac{i-\cos\theta-i\sin\theta}{i} 1 + ie^{i\theta}$

b) $z_1 = z_2 \Leftrightarrow \Delta' = 0 \Leftrightarrow \sin\theta = 0$ Or $\theta \in \left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[\Leftrightarrow \theta = \pi$

2) Soit $z \in$ C$\backslash\{0,2\}$

$M(z) \in E \Leftrightarrow \arg\left(\frac{z-2}{z}\right) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi] \Leftrightarrow \left(\widehat{\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{AM}}\right) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi] \Leftrightarrow M \in OA\backslash\{O, A\}$ du cercle de diamètre $[OA]$

3)a) $z_1 = 1 + ie^{i\theta} = e^{i\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)} + 1 = e^{i\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}\left(e^{i\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)} + e^{-i\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}\right)$ $=2\cos\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)e^{i\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}$

Et comme $\theta \in \left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[$ donc $\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4} \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ ainsi $\cos\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right) > 0$ d'où l'écriture exponentielle de z_1 est $2\cos\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)e^{i\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}$

De même on obtient $z_2 = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)e^{i\left(-\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}$ et comme $\theta \in \left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[$ donc $\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4} \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$

Ainsi $\cos\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right) < 0$ d'où l'écriture exponentielle de z_2 est. $-2\cos\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)e^{i\left(\frac{\theta}{2}-\frac{3\pi}{4}\right)}$

b) $z_1 = 1 + ie^{i\theta} \Leftrightarrow z_1 - 1 = ie^{i\theta} \Leftrightarrow z_{M_1} - z_A = e^{i\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)} \Leftrightarrow \begin{cases} AM_1 = 1. \\ \left(\widehat{\vec{u}_1 \overrightarrow{AM_1}}\right) \equiv \frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}, \theta \in \left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[$

Et comme $\theta \in \left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[$ alors $\theta + \frac{\pi}{2} \in]\pi, 2\pi[$ donc l'ensemble des points M_1 est l'arc CB du cercle de centre A et de rayon 1

4) Remarque : $M_1 \neq M_2 \Leftrightarrow z_1 \neq z_2 \Leftrightarrow \theta \neq \pi$ donc dans la suite $\theta \in \left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[\,|\{\pi\}$

a) On a $\vec{AG}+\vec{M_2G}+\vec{M_1G}=\vec{O} \Leftrightarrow 3z_G=z_A+z_{M_1+}z_{M_2} \Leftrightarrow z_G=\frac{3+i(e^{i\theta}+e^{-i\theta})}{3}=1+\frac{2}{3}i\cos\theta$

Soit $z_6=x+iy\,,(x,y)\in \mathrm{R}^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=\frac{2}{3}\cos\theta \end{cases}, \theta\in \left]\frac{\pi}{2}\cdot\frac{3\pi}{2}\right[|\{\pi\} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y\in]-1{,}0[\end{cases}$

Donc l'ensemble des points G est le segment $[DA]$Privé des points A et D , D est le point d'affixe $1-i$

b) Remarquons que $AM_1=|z_1-z_A|==|ie^{i\theta}|=1$ et $AM_2=|z_2-z_A|==|ie^{-i\theta}|=1$

Donc le triangle AM_1M_2 est isocèle pour tout $\theta\in\left]\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right[|\{\pi\}$

AM_1M_2 est rectangle isocèle $\Leftrightarrow \vec{AM_1}\perp\vec{AM_2} \Leftrightarrow \frac{aff(\vec{AM_1})}{aff(\vec{AM_2})}\in i\mathrm{R} \Leftrightarrow e^{i2\theta}\in i\mathrm{R} \Leftrightarrow 2\theta=\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in \mathrm{Z}$

$\Leftrightarrow \theta=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}, k\in\mathrm{Z}$ et comme $\theta\in\left]\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right[|\{\pi\}$ donc $\theta=\frac{3\pi}{4}$ ou $\theta=\frac{5\pi}{4}$

c) AM_1M_2 est un triangle équilatéral $\Leftrightarrow M_1M_2=1 \Leftrightarrow |z_1-z_2|=1 \Leftrightarrow |i\quad(e^{ia}-e^{-i\theta})|=1$

$\Leftrightarrow |\cos\theta|=\frac{1}{2} \Leftrightarrow cos(\theta)=\frac{1}{2}$ ou $\cos(\theta)=-\frac{1}{2}$ et comme $\theta\in\left]\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right[|\{\pi\}$ alors $\theta=\frac{2\pi}{3}$ ou $\theta=\frac{u\pi}{3}$

Exercice 15

$\begin{cases} a=1. \\ b=-2m. \\ c=-2(1+i) \end{cases}$ Donc $\Delta'=m^2+2+2i$ alors si $m=i\sqrt{2}$ on a $\Delta'=2i=(1+i)^2$

Ainsi $z_1=i\sqrt{2}+1+i$ et $z_2=i\sqrt{2}-1-i$

$\frac{aff(\vec{OM_1})}{aff(\vec{OM_2})}=\frac{1+i(\sqrt{2}+1)}{-1+i(\sqrt{2}-1)}=\frac{-1-i(\sqrt{2}-1)-i(\sqrt{2}+1)+1}{1+(\sqrt{2}-1)^2}=\frac{-2i\sqrt{2}}{1+(\sqrt{2}-1)^2}\in i\mathrm{R}$ Donc $0M_1M_2$ est rectangle

Autrement $\vec{OM_1}\begin{pmatrix}1\\1+\sqrt{2}\end{pmatrix}$ et $\vec{OM_2}\begin{pmatrix}-1\\-1+\sqrt{2}\end{pmatrix}$ donc $\vec{OM_1}\vec{OM_2}=-1+([2+1)(\sqrt{2}-1)=0$

2) Remarquons que 0 n'est pas une solution de E donc $z_1\neq 0$ et $z_2\neq 0$

a) $\vec{OM_1}\perp\vec{OM_2} \Leftrightarrow \frac{z_1}{z_2}\in i\mathrm{R} \Leftrightarrow z_1\bar{z_2}\in i\mathrm{R} \Leftrightarrow (m+\delta)\left(\bar{m}-\bar{\delta}\right)\in i\mathrm{R}$

$\Leftrightarrow m\bar{m}-\delta\bar{\delta}+\left(\delta\bar{m}-m\bar{\delta}\right)\in i\mathrm{R}$, δ est une racine carrée de Δ'

Et comme $\left(\delta\bar{m}-m\bar{\delta}\right)\in i\mathrm{R}$, $m\bar{m}=|m|^2$ et $\delta\bar{\delta}=|\delta|^2=|\Delta'| \Leftrightarrow |m|^2=|\Delta'|$

b) Soit $z=x+iy\,,(x,y)\in\mathrm{R}^2$

$$M(m)\in\Gamma \Leftrightarrow |m|^2=|\Delta'| \Leftrightarrow |m|^4=|\Delta'|^2 \Leftrightarrow x^4+y^4+2x^2y^2=(x^2-y^2+2)^2+4(xy+1)^2$$

$$\Leftrightarrow x^4+y^4+2x^2y^2=x^4+y^4+4+4x^2-4y^2-2x^2y^2+4x^2y^2+8xy+4$$

$$\Leftrightarrow x^2-y^2+2xy+2=0$$

3) $aff\left(\vec{OM_1}\right)=z_1=m+\delta$ et $aff\left(\vec{M_2N}\right)==2m-z_2=2m-m+\delta=z_1$ donc $\vec{OM_1}=\vec{M_2N}$ et comme $\vec{OM_1}\perp\vec{OM_2}$ donc $0M_1NM_2$ est un rectangle

b) Soit $\theta \equiv \arg(z_1)[2\pi]$ donc $M_1 \in [Ot)$ privé de O tel que $\left(\widehat{\vec{u},\vec{ot}}\right) \equiv \theta[2\pi]$ et comme $\vec{OM_1} \perp \vec{OM_2}$ alors $M_2 \in \Delta$ la droite perpendiculaire a (Ot) et passant par O or $0M_1NM_2$ est un rectangle Alors M_1 est le projeté orthogonal de M sur (Ot) et M_2 est le projeté orthogonal de M sur Δ

Exercice 16

1) Soit $M(z)$ un point invariant par f $\Leftrightarrow \frac{z+iz\bar{z}}{1+z\bar{z}} = z \Leftrightarrow z + iz\bar{z} = z + z^2\bar{z} \Leftrightarrow z\bar{z}(z-i) = 0$

$\Leftrightarrow |z| = ou\ z = i \Leftrightarrow z = 0\ ou\ z = i$ Ainsi les points invariants sont O et A

2) $z \neq i$ donc $A \neq M$.on a $\frac{aff\left(\vec{AM'}\right)}{aff\left(\vec{AM}\right)} = \frac{z'-i}{z-i}$ or $z^1 - i = \frac{z-i}{1+|z|^2}$ donc $\frac{z'-i}{z-i} = \frac{1}{1+|z|^2} \in$ R alors les vecteurs $\vec{AM}$ et $\vec{AM}'$sont colinéaires. Ainsi Les points A,M, et M' sont alignés

3)a) Soit $z \in$ C$|\{0,-i\}$ alors $\arg(z') \equiv \arg\left(iz\left(\frac{\bar{z}-i}{1+[z]^2}\right)\right)[2\pi]$ or $1+|z|^2 \in$ R$_+^*$

Donc $\arg(z') \equiv \arg(i) + \arg(z) + \arg(\overline{z+i}) \equiv \frac{\pi}{2} + \arg(z) - arg(z+i)[2\pi]$

$$\equiv \frac{\pi}{2} + \arg\left(\frac{z_M - z_O}{z_m - z_B}\right) \equiv \frac{\pi}{2} + \left(\widehat{\vec{BM},\vec{OM}}\right)[2\pi]$$

b) Si $M \in \Gamma\backslash\{0.B\}$ alors $\left(\widehat{\vec{BM},\vec{AM}}\right) = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in$ Z donc $\arg(z') = k\pi, k \in$ Z ainsi $z' \in$ R

Et par suite $M' \in \left(0,\vec{u}\right)$

c) Soit $\Gamma\backslash\{0.A,B\}$ Alors

D'une part A, M et M'sont alignés donc $M' \in (0M)$

D'autre part $M' \in \left(0,\vec{u}\right)$ ainsi $M^1 \in \left(0,\vec{u}\right) \cap (AM)$

4)a) $|z^1 - z| = |z^1 - i| \Leftrightarrow \left|\frac{z\bar{z}(i-z)}{1+z\bar{z}}\right| = \left|\frac{z-i}{1+z\bar{z}}\right| \Leftrightarrow |z|^2|i-z| = |z-i| \Leftrightarrow |z-i| = 0\ ou\ |z|^2 = 1$

$\Leftrightarrow z = i\ ou\ |z| = 1 \Leftrightarrow M = A$ Ou $OM = 1 \Leftrightarrow M \in \varphi$ car $A \in \varphi$

b) Si $M \in \varphi|\{A\}$ alors $|z^1 - z| = |z^1 - i|$ donc $MM' = AM'$ d'où M est un point de la médiatrice de $[AM]$ et comme A, M et M'sont alignés donc M' est le milieu de $[AM]$

c) $M(z) \in \varphi \Leftrightarrow z = e^{i\theta}, \theta \in [0,2\pi[\Leftrightarrow z' = \frac{e^{i\theta}+i}{2} \Leftrightarrow z' - \frac{i}{2} = \frac{1}{2}e^{i\theta} \Leftrightarrow \begin{cases} IM = \frac{1}{2} \\ \left(\widehat{\vec{u},\vec{IM}}\right) \equiv \theta[2\pi] \end{cases}, \theta \in [0,2\pi[$

I est le point d'affixe $\frac{i}{2}$ ainsi $f(\varphi) = \varphi'$ le cercle de centre I et de rayon $\frac{1}{2}$