Exercice 1

1. Résoudre dans C l'équation $(E): 2z^2 - 1 + i\sqrt{3} = 0$ (on note a la solution telle que $R_e(a) > 0$)

2.a. Déterminer le module et un argument de $1 + a$

b. Vérifier $(1-a)(1+a) = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ puis déterminer l'écriture exponentielle de $1 - a$

3. Dans la suite le plan complexe est rapporté a un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$

On considère les points A,B,M,M' et N les points d'affixes respectives a ,$-a$,z,z' et $\overline{z}$

et on suppose que $2zz' - 1 + i\sqrt{3} = 0$ et $|z| = 1$

a. Montrer que $\left(\widehat{\overrightarrow{OM'}, \overrightarrow{ON}}\right) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$ et $z' - a = \left(-1 + i\sqrt{3}\right)\frac{z-a}{2az}$

b. Montrer que si $(z+a)(z'+a) \neq 0$ alors $\frac{z'-a}{z'+a} == -\frac{z-a}{z+a}$

c. On suppose A,Bet M non alignés montrer que A,B,M et M' sont cocycliques

Exercice 2

(I) Soit m un nombre complexe non nul

On considère l'équation $(E): (z+1)^2 + m^2 = 0$

1. Résoudre dans C l'équation (E)

2. Déterminer m pour que $e^{i\frac{\pi}{3}}$ soit une solution (E)

3. Déterminer l'ensemble des points $M(m)$ pour que les solutions de (E) aient même module

(II) Dans la suite le plan complexe est rapporté a un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$ et on considère les points M,B et C d'affixe respectives m , $b = -1 + \mathrm{im}$ et $c = -1 - im$

1.Déterminer l'ensemble des points $M(m)$ pour que M,B et C soient alignés

2. On suppose que $|m|^2 + R_e(m) \neq 0.$: Soit $R \underset{M(z) \mapsto M'(z')}{\overset{P \to P}{}}$ tel que $z' = iz - 1$

a. Montrer que R est une rotation dont on précisera le centre Ω et une mesure de son angle

b. Montrer que $\frac{c-m}{c-b} \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow |m|^2 = \mathrm{Im}(m)$

c. Déduire l'ensemble des points $M(m)$ pour que M,B , C et Ωsoient cocycliques

Exercice 3

On se place dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal direct .$(O, \vec{u}, \vec{v})$

On note (z_n) la suite de nombres complexes, de terme initial$z_n = 0$, et telle que : $z_{n+1} = \frac{1+i}{2}z_n + 1$

, pour tout entier naturel n. On note A_n le point d'affixe z_n.

1. Calculer les affixes des pointsA_1 ,A_2et A_3. Placer ces points

2. $\Omega(1 + \mathrm{i})$

a. Démontrer que le triangle $\Omega A_n A_{n+1}$est isocèle rectangle.

b. Établir que, pour tout entier naturel n, on a : $\Omega A_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

c. À partir de quelle valeur de n les points ΩA_nsont-ils situés à l'intérieur du disque de centre Ω et de rayon 0,001 ?

3. Pour tout entier naturel n, on note a_n la longueur de A_nA_{n+1} et $L_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$

. Déterminer la limite de L_n

Exercice 4

Le plan P est rapporté à un repère orthonormé direct $(o,\vec{u},\vec{v})$. On pose $j = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$

1.a) Montrer que 1,j et j^2 sont les solutions de l'équation $z^3 = 1$

b) Montrer que $j^2 = \bar{j}$ et que $1 + j + j^2 = 0$

2. On considère les points $A(a)$, $B(b)$ et $C(c)$

a) Montrer que le triangle ABC est équilatéral directe si et seulement si $\frac{c-a}{b-a} = e^{i\frac{\pi}{3}}$

b) En déduire que le triangle ABC est équilatéral directe si et seulement si $a + bj + cj^2 = 0$

3. Atout nombre complexe différent de 1 on associe les points $R(1)$, $M(z)$ et $M'(\bar{z})$

Déterminer l'ensemble des points M pour que le triangle RMM' soit équilatéral directe

Exercice 5

Le plan P est rapporté à un repère orthonormé direct $(o,\vec{u},\vec{v})$.

Soit f l'application qui à tout point M de P d'affixe z associe le point M' d'affixe :

$$z' = \frac{1}{6}\left(\left(1 + i\sqrt{3}\right)z + 2\bar{z}\right)$$

1) Déterminer l'ensemble des points M tel que $z' = 0$

2) On pose $M_0(z_0 = 1)$ et pour tout entier naturel n

$M_n(z_n)$ et $M_{n+1}(z_{n+1})$ tel que $M_{n+1} = f(M_n)$.

Et on considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = |z_n|$

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a: $0 \le u_{n+1} \le \frac{2}{3}u_n$

b) En déduire que (u_n) et convergente et calculer sa limite

3) On considère la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $s_n = \sum_{k=0}^{n} OM_k$

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $s_n \le 3$

b) En déduire que (S_n) et convergente

4) a)On pose $z = re^{i\theta}$, $\theta \in]-\pi,\pi]$ et $r > 0$. Montrer que $z' = \frac{2}{3}r\cos\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right)e^{i\frac{\pi}{6}}$

b) En déduire que les points M_1 , M_2 , M_3 , ……….. et M_n sont alignés

Exercice 5

On se propose de résoudre dans C l'équation $(E): z^3 - 6z + 4 = 0$

1) Résoudre dans C l'équation $(E'): z^2 + 4z + 8 = 0$

2) On pose $= e^{i\frac{2\pi}{3}}$, $z_1 = -2 + 2i$ et $z_2 = -2 - 2i$

a) Montrer que les racines cubiques de z_1 sont $1 + i$, $(1 + i)j$ et $(1 + i)j^2$

b) En déduire les racines cubiques de z_2

3) Soit z une solution de (E) , u et v deux nombres complexes tels que $u+v=z$ et $uv=2$

a) Calculer $(u+v)^3$ de deux manières et en déduire que $u^3+v^3=-4$

b) Montrer alors que u^3 et v^3 sont solutions de (E')

4) a) En utilisant les questions précédentes déterminer les valeurs possibles de u et v puis de z

b) En déduire les solutions de (E)

Exercice 6

Soit n un entier naturel $n \geq 2$

1) Résoudre dans C l'équation $(E_n): z^{2n}=1$

2) Soit ω_k , $k \in \{0,1 \dots 2n-1\}$ les solutions de (E_n)

a. Montrer que $\sum_{k=0}^{2n-1} \omega_k = 0$

b. Montrer que $\forall k \in \{0,1 \dots 2n-1\}$ on a $\overline{\omega}_k = \omega_{2n-k}$

3) Soit $u = \sum_{k=1}^{n-1} \omega_k$

a. Montrer que $\overline{u} = \sum_{k=n+1}^{2n-1} \omega_k$

b. En déduire que u est imaginaire

Exercice 7

Le plan est rapporté a un repère orthonormé direct $\left(0, \vec{u}, \vec{v}\right)$

Partie A

Soit z_1 et z_2 deux nombres complexes non nuls et tel que $z_1 \neq z_2$ et $z_1 \neq -z_2$

On considéré les points $M_1(z_1)$, $M_2(z_2)$ et $M(z)$ tel que $z=\frac{2z_1z_2}{z_1+z_2}$

1) a. Montrer que $\frac{z-z_1}{z-z_2}\frac{z_2}{z_1}=-1$

b. Montrer que M appartient au cercle circonscrit au triangle OM_1 M_2

c. Montrer que si $z_2=\overline{z_1}$ alors M appartient l'axe réel

2) Soit $\beta \in]0,\pi[$ on suppose que $M_2=R_{(O,\beta)}(M_1)$

a. Exprimer z_2 en fonction z_1, et β

b. Montrer que M est un point de la médiatrice de $[M_1\ M_2]$

Partie B

Soit α un nombre complexe non nul

On considère l'équation $(E): z^2+(1-i)z+\alpha=0$ et le point A d'affixe $\frac{i}{2}$

1) a. Déterminer α pour que (E) admet une racine double

b. Déterminer α pour que $\frac{i}{2}$ soit une solution de (E)

c. Soit δ une racine carrée de Δ le discriminant de (E) .

Déterminer z_1 et z_2 les solutions de (E) en fonction de δ

2) Dans la suite on suppose que $\alpha \neq -\frac{i}{2}$ et $\alpha \neq -\frac{i}{2}-\frac{1}{4}$

a. Montrer que le triangle AM_1M_2 est rectangle en A si et seulement si $|\Delta| = 1$

b. On pose $\Delta = e^{i\theta}$. Déterminer α , z_1 , z_2 et z en fonction de θ