

Exercice n°1:

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

1- Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z non nul tel que $\frac{z}{\bar{z}}$ soit réel.

2- On considère les points N et Q d'affixes respectives $\bar{z}$ et $\frac{z^2}{\bar{z}}$.

Vérifier que $\frac{z_Q - z_M}{z_N - z_M} = -\frac{z}{\bar{z}}$ et déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tel que M, N et Q soient alignés.

3- On pose M d'affixe $z = i(1 - e^{i\theta})$, où $\theta \in]0, \pi[$.

a- Ecrire z sous forme exponentielle.

b- Déterminer en fonction de θ , une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MQ})$.

c- Déterminer alors θ pour que le triangle MNQ soit équilatéral.

Exercice n°2:

Le plan P est muni d'un r.o.n.d $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On considère les points A(1) ; B(i) ; C(2 - i) et D(3-4i)

A tout point M(z) du plan on associe le point M'(z') tel que : $z' = 2 - i + (z - 1)^2$

1- Déterminer les nombres complexes z tel que : $z' = z$.

2- Soit M(z) un point du plan distinct de A et on pose $(\vec{u}, \overrightarrow{AM}) \equiv \theta[2\pi]$

a- Donner une relation entre AM et CM'.

b- Exprimer, en fonction de θ une mesure de l'angle $(\vec{u}, \overrightarrow{CM'})$

c- Déterminer l'ensemble $E = \left\{ M(z) \in P \text{ tel que : } z - 1 = \sqrt{2} e^{i\theta} \text{ avec } \theta \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} \right] \right\}$

d- Déterminer l'ensemble F des points M' lorsque M décrit E.

3- Soit Δ la droite d'équation : $2y + x - 1 = 0$.

a- Montrer que : $M(z) \in \Delta \Leftrightarrow z - 1 = y(-2 + i)$ avec $y \in \mathbb{R}$.

b- Déterminer alors l'ensemble Δ' des points M' lorsque M décrit Δ .

Exercice n°3 :

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

On considère les points A, B, C et D les points d'affixes respectives : $Z_A = 1 + 2i$, $Z_B = 1 + \sqrt{3} + i$, $Z_C = 1 + \sqrt{3} - i$ et $Z_D = 1 - 2i$

1-a- Montrer que $\frac{Z_D - Z_B}{Z_A - Z_B} = i\sqrt{3}$ et montrer que les points A, B, C et D appartiennent à un même cercle ζ .

b- Placer, dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$, les points A et D et construire les points B et C.

d- Montrer que le quadrilatère ABCD est un trapèze isocèle.

2- Soient M_1 et M_2 les points d'affixes respectives $Z_1 = 1 + 2e^{i\theta}$ et $Z_2 = 1 + 2e^{-i\theta}$. θ est un réel de $\left] \frac{\pi}{2}, \pi \right[$

a- Montrer que les points M_1 et M_2 appartiennent à ζ .

b- Montrer que $AM_1 = 2\sqrt{2 - 2\sin\theta}$ et $M_1M_2 = 4\sin\theta$.

c- Déterminer θ A, B, C, D, M_1 et M_2 soient les sommets d'un hexagone régulier inscrit dans le cercle ζ .

Exercice n°4:

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Soient les points A(1) et B(-1).

A tout point M d'affixe $z \in \mathbb{C}^*$ on associe le point M' d'affixe z' tel que : $z' = -\frac{1}{\bar{z}}$.

2- Soit M un point du cercle de centre A de rayon 1 distinct du point O.

a- Montrer que $|z' + 1| = |z'|$ et en déduire que M' appartient à une droite fixe que l'on déterminera.

b- Donner alors une construction du point M' à partir du point M.

3- Soit M un point du plan n'appartenant pas à l'axe des abscisses.

a- Vérifier que : $\frac{z' + 1}{z' - 1} = -\frac{\bar{z} - 1}{\bar{z} + 1}$ et comparer $(\overrightarrow{M'A}, \overrightarrow{M'B})$ et $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})$.

b- En déduire que M' appartient au cercle circonscrit au triangle ABM.

Exercice n°6 :

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

On désigne par A le point d'affixe i et par Δ la droite d'équation : $y = \frac{1}{2}$.

A tout point M du plan d'affixe $z \neq i$ on associe le point M' d'affixe z' tel que : $z' = \frac{iz}{z+i}$.

1-a- Montrer que Δ est l'ensemble des points M du plan d'affixe $z \neq i$ vérifiant $z' = i$.

b- Déterminer l'ensemble ζ des points M du plan tel que M' soit le milieu du segment [AM].

2-a- Vérifier que pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$: $z' - i = \left(\frac{1 - 2\text{Im}(z)}{|z-i|^2} \right) (z-i)$.

b- En déduire que pour tout point M du plan privé de A, les points A, M et M' sont alignés.

3- On pose $z = x + iy$ avec x et y des réels.

On désigne par H le projeté orthogonal sur la droite Δ du point M d'affixe z.

Soit Γ l'ensemble des points M du plan vérifiant : $MA = MH$.

a- Montrer qu'une équation de Γ est : $y = x^2 + \frac{3}{4}$ et tracer Γ .

b- Montrer que pour tout point M du plan privé de A : $AM' \times AM = 2HM$.

c- En déduire que si M varie sur Γ alors M' varie sur un cercle ζ' que l'on précisera.

d- Donner alors une construction géométrique du point M' si M appartient à Γ .

Exercice n°7

Soient $(O, \vec{u}, \vec{v})$ un repère orthonormé direct du plan complexe et A le point d'affixe i.

A tout point M d'affixe $z \neq i$, on associe le point M' d'affixe z' tel que : $z' = \frac{z^2}{i - z}$.

1- Déterminer les points M d'affixe z tel que : $z' = z$.

2- On pose $z = x + iy$ avec x et y des réels.

Montrer que : $\text{Re}(z') = -\frac{x(x^2 + y^2 - 2y)}{x^2 + (y-1)^2}$ et en déduire l'ensemble E des points M(z) tel que z' est imaginaire.

3- On pose $z = e^{i\theta}$ avec $\theta \in \left] -\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$.

a- Montrer que : $i - z = 2i \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right) e^{i\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)}$.

b- En déduire que M' appartient au cercle de centre O et de rayon 1 ssi : $\theta = \frac{\pi}{6}$ ou $\theta = -\frac{7\pi}{6}$.

4- Soient G le point tel que $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GM} + \overrightarrow{GM'} = \vec{0}$ et M(z) un point du cercle ζ de centre A et de rayon $\frac{1}{2}$.

a- Montrer $z_G = \frac{1}{3(z-i)}$ et en déduire que G appartient à un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

b- Montrer que $(\vec{u}, \overrightarrow{OG}) \equiv -(\vec{u}, \overrightarrow{AM})$.

c- Construire alors G et M' connaissant un point M du cercle ζ .

