**Exercice1**

Le plan $P$ est rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ [unité graphique : 2 $cm$].

On considère les points $I$ et $A$ d'affixes respectives 1 et $-2$. Le point $K$ est le milieu du segment $[IA]$. On appelle $(C)$ le cercle de diamètre $[IA]$.

Faire une figure et la compléter au fur et à mesure de l'exercice.

1. Soit $B$ le point d'affixe $b$ où $b = \dfrac{1+4i}{1-2i}$. Ecrire $b$ sous forme algébrique et montrer que $B$ appartient au cercle $(C)$.
2. Soit $D$ le point du cercle $(C)$ tel que $\left(\overrightarrow{KI}, \overrightarrow{KD}\right) \equiv \dfrac{\pi}{3}[2\pi]$, où $k$ est un entier relatif, et soit $d$ l'affixe de $D$.

   a) Quel est le module de $d + \dfrac{1}{2}$ . Donner un argument de $d + \dfrac{1}{2}$.

   b) En déduire que $d = \dfrac{1}{4} + \dfrac{3i\sqrt{3}}{4}$.

   c) Déterminer un réel $a$ vérifiant l'égalité : $\dfrac{1+2ia}{1-ia} = \dfrac{1}{4} + \dfrac{3i\sqrt{3}}{4}$.
3. Soit $x$ un réel non nul et $M$ le point d'affixe $m = \dfrac{1+2ix}{1-ix}$. On pose $Z = \dfrac{m-1}{m+2}$. Calculer $Z$ et en déduire la nature du triangle $AIM$.
4. Soit $N$ un point, différent de $A$, du cercle $(C)$ et $n$ son affixe. Démontrer qu'il existe un réel $y$ tel que $n = \dfrac{1+2iy}{1-iy}$.

**Exercice2**

Soient $A$, $B$ et $C$ trois points du plan d'affixes respectifs $a$, $b$ et $c$.

Montrer que les points $A$, $B$ et $C$ sont alignés si et seulement si $a\bar{b} - \bar{a}b + b\bar{c} - \bar{b}c + c\bar{a} - \bar{c}a = 0$.

**Exercice 3**

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé direct (O; $\vec{u}, \vec{v}$) (unité graphique : 2 $cm$), on considère :

- le point $A$ d'affixe $a = 5 - i\sqrt{3}$ ;
- le point $B$ tel que le triangle $OAB$ soit équilatéral direct, c'est-à-dire avec $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right) = \dfrac{\pi}{3}[2\pi]$ ;
- le milieu $Q$ de $[OB]$.

1. a) Démontrer que $B$ a pour affixe $b = 4 + 2i\sqrt{3}$. En déduire l'affixe $q$ de $Q$.

   b) Déterminer l'affixe $z_K$ du point $K$ tel que $ABQK$ soit un parallélogramme.

   c) Démontrer que $\dfrac{z_K - a}{z_K}$ est imaginaire pur. Qu'en déduit-on pour le triangle $OKA$ ?

   Préciser la nature du quadrilatère $OQAK$.

   d) Placer les points $A$, $B$, $Q$ et $K$ dans le plan.

2. Soit $C$ le point d'affixe $c=\frac{2a}{3}$.

a) Calculer $\frac{z_K-b}{z_K-c}$. Que peut-on en déduire pour les points $B$, $C$ et $K$ ?

b) Placer $C$ sur la figure.

**Exercice 4**

$a$, $b$ et $z$ trois complexes avec $a\neq b$ et $|a|=|b|=1$ et $t=\frac{z+ab\overline{z}-(a+b)}{a-b}$, montrer que $t^2$ est réel négatif ou nul.

**Exercice 5**

1. Montrer que pour tout $a$, $b$ complexes non nul, on a : $\left|\frac{a}{|a|^2}-\frac{b}{|b|^2}\right|=\frac{|a-b|}{|a||b|}$.
2. Montrer que pour tous complexes $x$, $y$, $z$, $|x||y-z|\leq|y||z-x|+|z||x-y|$.
3. Montrer l'égalité dite de Ptolémée :

   Pour tous complexes $x,y,z,w$, $|x-y||z-w|\leq|x-z||y-w|+|x-w||y-z|$.

**Exercice 6**

Soit $a$ un complexe de module $|a|\prec 1$.

1. Démontrer que, pour tout nombre complexe $z$ tel $1-a\overline{z}\neq 0$.

$$1-\left|\frac{z-a}{1-\overline{a}\,z}\right|^2=\frac{\left(1-|a|^2\right)\left(1-|z|^2\right)}{\left|1-\overline{a}\,z\right|^2}.$$

2. Déterminer les nombres complexes $z$ vérifiant $\left|\frac{z-a}{1-\overline{a}\,z}\right|\leq 1$.

**Exercice 7**

Le paln complexe est rapporté à un repère orthonormé $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$.

A tout point $M$ du plan d'affixe $z$, différent de zéro, on associe les points $M'$ et $M''$ d'affixes respectives $z'$ et $z''$ définies par $z'=iz$ et $z''=z^2$.

1. **Cas particulier**. Soit $A$ le point d'affixe $a=2-i$ et $B$ le point d'affixe $b=2+i$.

   On appelle $A'$ et $A''$ les points associés à $A$. On appelle $B'$ et $B''$ les points associés à $B$.

   a) Déterminer sous forme algébrique, les ffixes $a'$ et $a''$ des points $A'$ et $A''$.

   Prouver que $A$ est le milieu du segment $[A'A'']$

   b) Déterminer sous forme algébrique, les ffixes $b'$ et $b''$ des points $B'$ et $B''$.

   c) Calculer ,sous forme algébrique , $\frac{b-b''}{b-b'}$. En déduire la nature du triangle $BB'B''$.

2. $M$ est un point quelconque d'affixe $z$ différent de zéro. $N$ est le point d'affixe $\overline{z}$. $N'$ et $N''$ sont les points associés au point $N$. on pose $z=x+iy, x$ et $y$ réels.

   a) Prouver que, si $z\neq 1,\left(\overrightarrow{MM'},\overrightarrow{MM''}\right)\equiv arg\left(\frac{z-1}{i-1}\right)[2\pi]$.

   b) Montrer alors que les points $M,M',M''$ sont alignés si et seulement si $y=-x+1$ $(1)$

   c) On suppose que l'affixe de $M$ est différente de 1 et que la relation $(1)$ est vérifiée.

   Prouver que $NN'N''$ est un triangle rectangle en $N$.

| Lycée pilote de Tunis | nombres complexes 3 | Terminales maths |
|---|---|---|
| Mr Ben Regaya. A | Eléments de corrections | www.ben-regaya.net |

**Exercice1**

1. $b=\dfrac{1+4i}{1-2i}=\dfrac{(1+4i)(1+2i)}{1+4}=\dfrac{1+4i+2i-8}{5}=-\dfrac{7}{5}+i\dfrac{6}{5}$. $B$ appartient au cercle $(C)$ si et seulement si $BK=IK=1{,}5$ :

   $aff\left(\overrightarrow{BK}\right)=(z_K-z_B)$ avec $z_K-z_B=-\dfrac{1}{2}-b=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{7}{5}-i\dfrac{6}{5}=\dfrac{9}{10}-i\dfrac{6}{5}$ d'où

   $|z_k-z_B|^2=\left|\dfrac{9}{10}-i\dfrac{6}{5}\right|^2=\dfrac{81}{100}+\dfrac{36}{25}=\dfrac{81}{100}+\dfrac{144}{100}=\dfrac{225}{100}$ donc $BK=\dfrac{15}{10}=1{,}5$ et $B$ appartient au cercle $(C)$.

2. a) $aff\left(\overrightarrow{KD}\right)=\left(d+\dfrac{1}{2}\right)$, $\left|d+\dfrac{1}{2}\right|=KD=1{,}5$ car $D$ appartient au cercle $(C)$,

   $arg\left(d+\dfrac{1}{2}\right)\equiv\left(\vec{u},\overrightarrow{KD}\right)[2\pi]\equiv\left(\overrightarrow{KI},\overrightarrow{KD}\right)[2\pi]\equiv\dfrac{\pi}{3}[2\pi]$.

   b) On en déduit que $d+\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2}\left(cos\dfrac{\pi}{3}+isin\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{3}{2}\left(\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=\dfrac{3}{4}+i\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$ donc

   $d=\dfrac{3}{4}+i\dfrac{3\sqrt{3}}{4}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{4}+i\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$.

   c) $\dfrac{1+2ia}{1-ia}=\dfrac{1}{4}+\dfrac{3i\sqrt{3}}{4}\Leftrightarrow 4(1+2ia)=(1-ia)(1+3i\sqrt{3})\Leftrightarrow 4+8ia=1+3i\sqrt{3}-ia+3a\sqrt{3}$

   $\Leftrightarrow 4+8ia=1+3a\sqrt{3}+i(3\sqrt{3}-a)\Leftrightarrow\begin{cases}1+3a\sqrt{3}=4\\3\sqrt{3}-a=8a\end{cases}\Leftrightarrow a=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

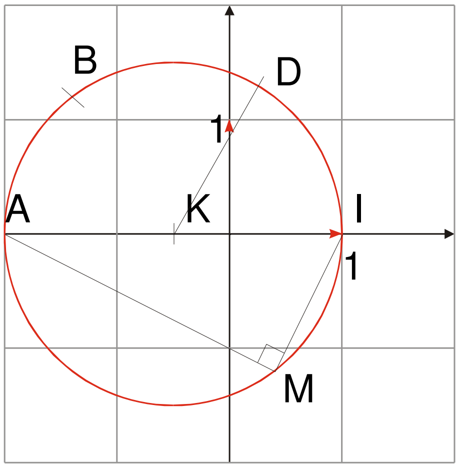
3. $Z=\dfrac{m-1}{m+2}=\dfrac{\dfrac{1+2ix}{1-ix}-1}{\dfrac{1+2ix}{1-ix}+2}=\dfrac{1+2ix-1+ix}{1+2ix+2-2ix}=\dfrac{3ix}{3}=ix$, $|Z|=|x|$ et $arg(Z)=\dfrac{\pi}{2}+k\pi$

   or $arg(Z)\equiv arg\left(\dfrac{m-1}{m+2}\right)[2\pi]\equiv\left(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{IM}\right)[2\pi]$ donc le triangle *AIM* est rectangle en *M*, ce qui signifie que le point *M* appartient au cercle $(C)$.

4. $n=\dfrac{1+2iy}{1-iy}\Leftrightarrow n(1-iy)=1+2iy\Leftrightarrow n-iny=1+2iy\Leftrightarrow y(2i+ni)=n-1\Leftrightarrow y=\dfrac{1}{i}\dfrac{n-1}{n+2}=-i\dfrac{n-1}{n+2}$ car

   $n\neq-2$ puisque *N* est différent de *A*. Vérifions que *y* est réel [si $n$ = 1 ($N$ = $I$) alors on prend $y$ = 0] :

   $arg(y)=arg\left(-i\dfrac{n-1}{n+2}\right)=arg(-i)+arg\left(\dfrac{n-1}{n+2}\right)=-\dfrac{\pi}{2}+2k'\pi+\dfrac{\pi}{2}+k''\pi=k\pi$ donc *y* est réel.




**Exercice 2**

$A$, $B$ et $C$ sont alignés si et seulement $\frac{b-a}{c-a}=\overline{\left(\frac{b-a}{c-a}\right)} \Leftrightarrow \frac{b-a}{c-a}=\frac{\bar{b}-\bar{a}}{\bar{c}-\bar{a}}$

$\Leftrightarrow (b-a)(\bar{c}-\bar{a})=(c-a)(\bar{b}-\bar{a})$

$\Leftrightarrow b\bar{c}-a\bar{c}-b\bar{a}+a\bar{a}=c\bar{b}-a\bar{b}+a\bar{a}-c\bar{a}$

$\Leftrightarrow a\bar{b}-\bar{a}b+b\bar{c}-\bar{b}c+c\bar{a}-\bar{c}a=0$.

**Exercice 3**

1. a) Le triangle $OAB$ soit équilatéral direct $\Leftrightarrow \begin{cases} OA=OB \\ (\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |a|=|b| \\ arg\left(\frac{b}{a}\right)\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} \left|\frac{b}{a}\right|=1 \\ arg\left(\frac{b}{a}\right)\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi] \end{cases}$.

On voit donc que le complexe $\frac{b}{a}$ a pour module 1 et pour argument $\frac{\pi}{3}$ on peut donc écrire

$\frac{b}{a}=1\times\left(cos\frac{\pi}{3}+isin\frac{\pi}{3}\right)$ ou encore $b=(5-i\sqrt{3})\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{5}{2}+\frac{3}{2}+i\left(\frac{5\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=4+2i\sqrt{3}$.

L'affixe de $B$ est $4+2i\sqrt{3}$.

$Q$ est le milieu de $[OB]$ donc $z_Q=\frac{z_B+z_O}{2}=2+i\sqrt{3}$.

b) $ABQK$ soit un parallélogramme signifie $A,B$ et $Q$ non alignés et $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{KQ}$.

Or $OAB$ triangle et $Q$ le milieu de $[OB]$ donc $A,B$ et $Q$ non alignés et $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{KQ}\Leftrightarrow z_B-z_A=z_Q-z_K$.

On obtient $z_K=3-2i\sqrt{3}$.

c) $\frac{z_K-a}{z_K}=\frac{3-2i\sqrt{3}-5+i\sqrt{3}}{3-2i\sqrt{3}}=\frac{-2-i\sqrt{3}}{3-2i\sqrt{3}}=\frac{(-2-i\sqrt{3})(3+2i\sqrt{3})}{9+12}=-3i\sqrt{3}$

On vient de prouver que $\frac{z_{\overrightarrow{AK}}}{z_{\overrightarrow{OK}}}$ est un imaginaire pur donc les vecteurs $\overrightarrow{AK}$ et $\overrightarrow{OK}$ sont orthogonaux.

Et comme $\left|\frac{z_K-a}{z_K}\right|=\left|-3i\sqrt{3}\right|=3\sqrt{3}\neq 1$ alors $KA\neq KO$ et par suite le triangle $AKO$ est rectangle en $K$ non isocèle.

Nature du quadrilatère $OQAK$.

$z_{\overrightarrow{OQ}}=z_Q$ et $z_{\overrightarrow{KA}}=z_A-z_K=5-i\sqrt{3}-3+2i\sqrt{3}=2+i\sqrt{3}=z_Q$ donc $\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{KA}$ et par suite $OQAK$ est un parallélogramme de plus le triangle $AKO$ est rectangle en $K$ donc $OQAK$ est un rectangle non carré.

2. a) $\frac{z_K-b}{z_K-c}=\frac{3-2i\sqrt{3}-4-2i\sqrt{3}}{3-2i\sqrt{3}-\frac{2}{3}\left(5-i\sqrt{3}\right)}=\frac{-1-4i\sqrt{3}}{-\frac{1}{3}-4i\frac{\sqrt{3}}{3}}=\frac{-1-4i\sqrt{3}}{\frac{1}{3}\left(-1-4i\sqrt{3}\right)}=3$.

On vient de voir que le rapport $\frac{z_{\overrightarrow{BK}}}{z_{\overrightarrow{CK}}}$ est réel donc les vecteurs $\overrightarrow{BK}$ et $\overrightarrow{CK}$ sont colinéaires et par suite les points $B$, $C$ et $K$ sont alignés.

b) pour le point $C$.

On a :

$c=\frac{2a}{3}\Leftrightarrow\overrightarrow{OC}=\frac{2}{3}\overrightarrow{OA}$ et donc $C$ est un point de la droite $(OA)$.

$B$, $C$ et $K$ sont alignés donc $C$ est un point de la droite $(BK)$.

D'où la construction de $C$ comme point d'intersection de deux droites.

**Exercice 4**

**Ne surtout pas penser à calculer** $t^2$ **!**

Remarquer que $t^2$ est réel négatif ou nul signifie $t$ est imaginaire

Or $\bar{t}=\frac{\bar{z}+\overline{ab}z-\left(\bar{a}+\bar{b}\right)}{\bar{a}-\bar{b}}=\frac{\bar{z}+\frac{z}{ab}-\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}=\frac{ab\bar{z}+z-(b+a)}{b-a}=-t$ donc $t$ est imaginaire.

**Exercice 5**

1. Il suffit d'écrire $\left|\frac{a}{|a|^2}-\frac{b}{|b|^2}\right|=\left|\frac{1}{\bar{a}}-\frac{1}{\bar{b}}\right|=\left|\frac{\bar{b}-\bar{a}}{\bar{a}\bar{b}}\right|=\frac{|a-b|}{|a||b|}$.
2. Si $xyz=0$, l'inégalité est évidente. On suppose donc que $x, y, z$ sont non nuls.

   On a $\left|\frac{y}{|y|^2}-\frac{z}{|z|^2}\right|\leq\left|\frac{y}{|y|^2}-\frac{x}{|x|^2}\right|+\left|\frac{x}{|x|^2}-\frac{z}{|z|^2}\right|$ donc $\frac{|y-z|}{|y||z|}\leq\frac{|y-x|}{|y||x|}+\frac{|x-z|}{|x||z|}$.

   On multiplie par $|x\,y\,z|\neq 0$, on obtient $|x||y-z|\leq|z||y-x|+|y||x-z|$ c'est le résultat demandé.
3. Pour tous complexes $a$, $b$ et $c$, on a : $|a||b-c|\leq|b||c-a|+|c||b-a|$.

   On applique ce résultat à $a=x-y, b=x-z$ et $c=x-w$, on trouve

   $|x-y||z-w|\leq|x-z||y-w|+|x-w||y-z|$.

**Exercice 6**

1. Il suffit de développer les modules au carré. On a :

$$1-\left|\frac{z-a}{1-\bar{a}z}\right|^2=\frac{\left|1-\bar{a}z\right|^2-|z-a|^2}{\left|1-\bar{a}z\right|^2}=\frac{1-\bar{a}z-a\bar{z}+|a|^2|z|^2-|z|^2-|a|^2+\bar{a}z+a\bar{z}}{\left|1-\bar{a}z\right|^2}=\frac{1+|a|^2|z|^2-|z|^2-|a|^2}{\left|1-\bar{a}z\right|^2}$$

$$=\frac{\left(1-|a|^2\right)\left(1-|z|^2\right)}{\left|1-\bar{a}z\right|^2}.$$

2. On commence par remarquer que : $\left|\frac{z-a}{1-\bar{a}z}\right|\leq 1 \Leftrightarrow \left|\frac{z-a}{1-\bar{a}z}\right|^2 \leq 1$.

Ensuite , on a d'après la question précédente $1-\left|\frac{z-a}{1-\bar{a}z}\right|^2=\frac{\left(1-|a|^2\right)\left(1-|z|^2\right)}{\left|1-\bar{a}z\right|^2}$.

Ainsi, on a l'équivalence $\left|\frac{z-a}{1-\bar{a}z}\right|\leq 1 \Leftrightarrow 1-\left|\frac{z-a}{1-\bar{a}z}\right|^2=\frac{\left(1-|a|^2\right)\left(1-|z|^2\right)}{\left|1-\bar{a}z\right|^2}\geq 0$.

Or $1-|a|^2 \succ 0$ et $\left|1-\bar{a}z\right|^2 \succ 0$. On a donc la propriété voulue si et seulement si $1-|z|^2\geq 0 \Leftrightarrow |z|\leq 1$.

**Exercice 7**

1. **Cas particulier**.

a) $a'=i(2-i)=1+2i$, $a''=(2-i)^2=3-4i$.

Le milieu du segment $[A'A'']$ a pour affixe $\frac{a'+a''}{2}=\frac{1+2i+3-4i}{2}=2-i=a$ donc $A$ est le milieu du segment $[A'A'']$.

b) $b'=i(2+i)=-1+2i$, $b''=(2+i)^2=3+4i$

c) Calculons,sous forme algébrique , $\frac{b-b''}{b-b'}=\frac{2+i-3-4i}{2+i+1-2i}=\frac{-1-3i}{3-i}=-i\frac{-i+3}{3-i}=-i$.

On a : $\frac{aff\left(\overrightarrow{B''B}\right)}{aff\left(\overrightarrow{B'B}\right)}=e^{-i\frac{\pi}{2}} \Leftrightarrow \begin{cases} B''B=B'B \\ \left(\overrightarrow{B'B},\overrightarrow{B''B}\right)\equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$ et donc le triangle $BB'B''$ est rectangle et isocèle indirect en $B$.

2. a) Bien si $z\neq 1$, le point $M$ est distinct des points $M'$ et $M''$.

Dans ce cas $\left(\overrightarrow{MM'},\overrightarrow{MM''}\right)\equiv arg\left(\frac{z''-z}{z'-z}\right)[2\pi]$, or $\frac{z''-z}{z'-z}=\frac{z^2-z}{iz-z}=\frac{z-1}{i-1}$ donc

$\left(\overrightarrow{MM'},\overrightarrow{MM''}\right)\equiv arg\left(\frac{z-1}{i-1}\right)[2\pi]$.

b) Les points $M,M',M''$ sont alignés si et seulement si $\left(\overrightarrow{MM'},\overrightarrow{MM''}\right)=k\pi, k\in\mathbb{Z}$ signifie $\frac{z-1}{i-1}$ est réel

Or $\frac{z-1}{i-1}=\frac{x-1+iy}{i-1}=\frac{(x-1+iy)(-1-i)}{2}=\frac{-x+1+y+i(-y-x+1)}{2}$.

Ainsi les points $M,M',M''$ sont alignés si et seulement si $Im\left(\frac{z-1}{i-1}\right)=0 \Leftrightarrow y=-x+1$.

On vient de prouver que les points $M,M',M''$ sont alignés si et seulement si $y=-x+1$.

c) toujours si $z\neq 1$ le point $N$ est distinct des points $N'$ et $N''$ et $\frac{z''-z}{z'-z}=\frac{\bar{z}^2-\bar{z}}{i\bar{z}-\bar{z}}=\frac{\bar{z}-1}{i-1}$ et donc

$arg\left(\frac{z''-z}{z'-z}\right)\equiv arg\left(\frac{\bar{z}-1}{i-1}\right)[2\pi]\equiv arg\left(\frac{\overline{z-1}}{\overline{-i-1}}\right)[2\pi]\equiv -arg\left(\frac{z-1}{-1-i}\right)[2\pi]\equiv -arg\left(\frac{z-1}{i(i-1)}\right)[2\pi]$

$\equiv -arg\left(\frac{1}{i}\right)-arg\left(\frac{z-1}{(i-1)}\right)[2\pi]\equiv\frac{\pi}{2}-arg\left(\frac{z-1}{i-1}\right)[2\pi]$ et comme la condition est satisfaite alors

$arg\left(\frac{z-1}{i-1}\right)k\pi, k\in\mathbb{Z}$ et donc $arg\left(\frac{z''-z}{z'-z}\right)=\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$ et par suite $\left(\overrightarrow{NN'},\overrightarrow{NN''}\right)=\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$ et le triangle $NN'N''$ est rectangle en $N$.