LPA M^{me} Mahjoubi Besma	Limites et continuité	2021/2022 4ème Math

Exercice 1 :

Calculer les limites suivantes

$\lim_{x\to-\infty} x\sqrt{\frac{x+1}{x^3-1}}$; $\lim_{x\to+\infty} \frac{1+2\sin x}{1+\sqrt{x}}$; $\lim_{x\to+\infty} \frac{\cos(1+x)}{1-x}$; $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{1+x}-\sin x$

$\lim_{x\to0}(\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{1+kx}}{x}) - \frac{n}{x}$; $\lim_{x\to+\infty} x^2(1-\cos(\frac{\pi}{x}))$ $\lim_{x\to0^-} x^2(1-\cos(\frac{\pi}{x})$

Exercice 2 :

La courbe C_f ci-dessous est la représentation graphique d' une fonction f définie et continue sur $\mathbb{R}$

1) Déterminer les limites suivantes $\lim_{x\to-\infty} f(x)$; $\lim_{x\to+\infty} f(x)$; $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}$; $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$; $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{f(x)-x}$

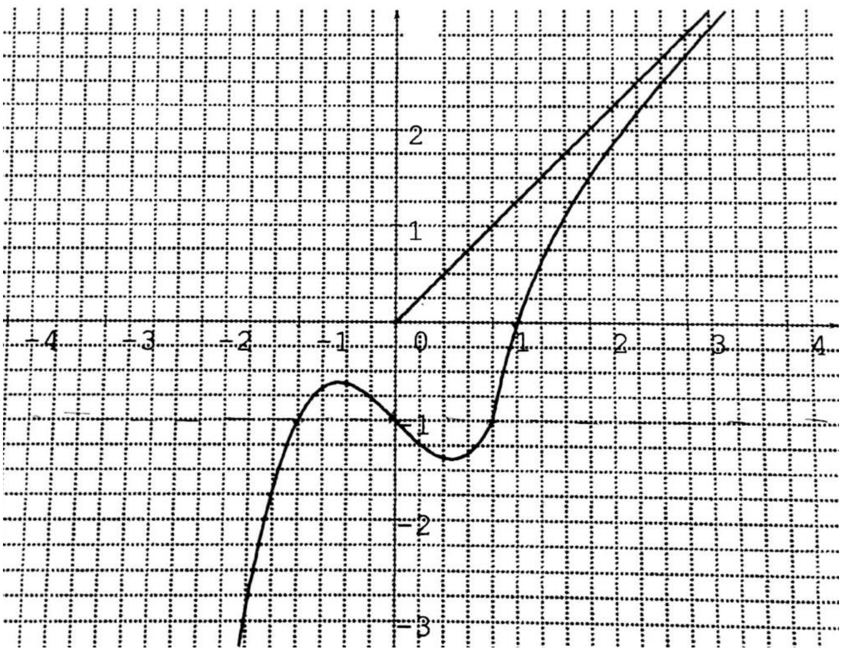
2) Soit g la fonction définie par $g(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}}$

a)Déterminer le domaine de définition de gof

b) Déterminer $\lim_{x\to0^-} gof(x)$; $\lim_{x\to-1^+}(fog(x) - g(x))$ et $g( ]-1,+\infty[ )$

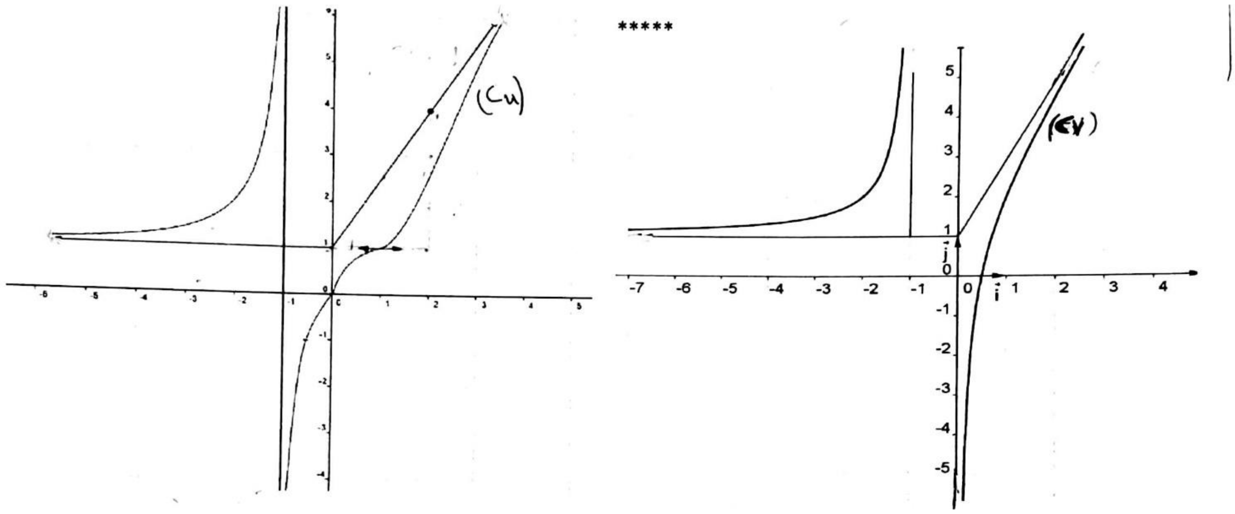
c)Montrer que gof est continue sur $]1,+\infty[$ et déterminer $gof(]1,+\infty[)$

d) Montrer que l'équation $gof(x) = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$ admet au moins une solution sur $]1,+\infty[$



Exercice 3 :

Les courbes ci-dessous sont les représentations graphiques des fonctions u et v



1) Déterminer le domaine de définition de (vou)

2) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} v(x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} v(x)-2x$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{vou(x)}{x}$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{uov(x)}{x}$;
$\lim\limits_{x\to-\infty} uou(x)$; $\lim\limits_{x\to0^+} vov(x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x)\sin(\frac{1}{u(x)})$

Exercice 4 :

Trouver s'il existe le prolongement par continuité en a de la fonction f dans chacun des cas suivants

1) $f(x)=\frac{1-|1-x|}{x-2}$; $a=2$

2) $f(x)=\frac{1}{x^2}\left(\frac{2}{\cos(x)}+\cos(x)-3\right)$; $x\in\left[\frac{-\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]-\{0\}$; $a=0$

3) $f(x)=\frac{sin^2\,(\pi x)}{x-1}$; $x\epsilon\mathbb{R}-\{1\}$; $a=1$

Exercice 5 :

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\frac{1}{2}+\frac{x}{\sqrt{1+4x^2}}$

1) Etudier les variations de f

2) Montrer que le point $I\left(0,\frac{1}{2}\right)$est un centre de symétrie de la courbe de f

3) Déterminer les asymptotes de la courbe de f

4) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique sur $\left] \frac{3}{4} \quad , \quad 1 \right[$

Exercice 6 :

Soit la fonction $f_n(x) = x^n + x^{n-1} + \cdots + x^2 + x - 1$ avec $x \in [0 \,, \; 1\,]$ et $n \geq 2$

1) Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution a_n dans $[0 \;,1]$

2) Montrer que (a_n) est strictement décroissante

3) Montrer que $(a_n)^{n+1} - 2a_n + 1 = 0$)

Exercice 7 :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in \mathbb{R}_+^*$. Soit f_n une fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $f_n(x) = x^n - t\,(1-x)$

1) Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet dans $\mathbb{R}_+^*$ une solution unique α_n et que $\alpha_n \in]0,1[\;\; \forall n \in \mathbb{N}^*$.

2) Montrer que : $f_{n+1}(\alpha_n) = -t\,(1-\alpha_n)^2$; $\forall n \in \mathbb{N}^*$ puis déduire les variations de (α_n).

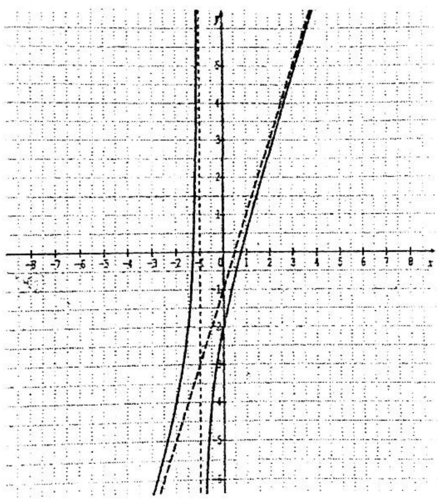
Exercice 8 :

1) Montrer que l'équation $x^3 + x - 1 = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ une solution unique α et que $\alpha \in \left]\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right[$

2) Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$, on désigne par C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé (voir figure) et soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^3 + x - 2$

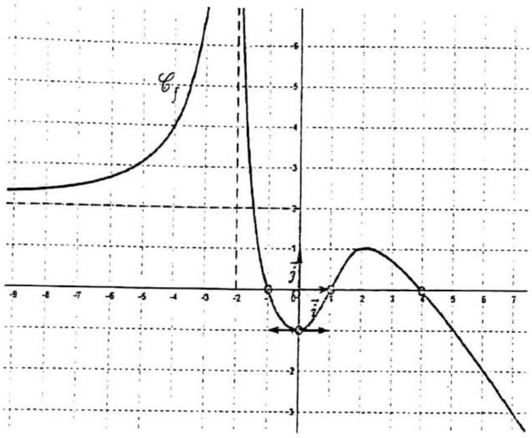
a) Déterminer l'ensemble de définition de chacune des fonctions : fog , gof

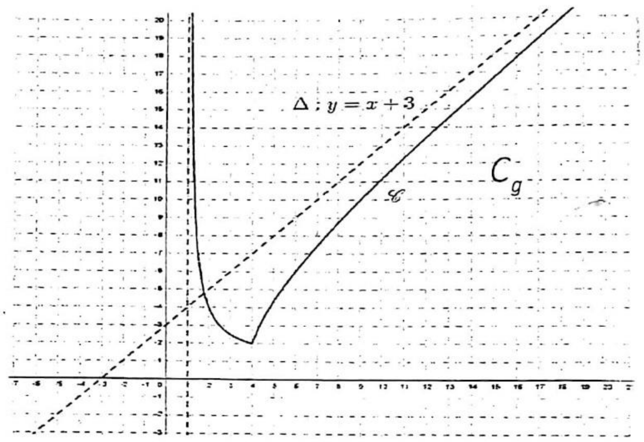
b) Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} fog(x)$, $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{fog(x)}{x}$



Exercice 9 :

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$. Dans les figures ci-dessous on a représenté les courbes C_f et C_g respectivement des fonctions f et g . C_f admet une asymptote vecticale une asymptote horizontale et une branche parabolique de direction $(O,\vec{j})$. C_g admet deux asymptotes une horizontale et une oblique au voisinage de $(+\infty)$.





1. Déterminer $f\left\langle]-2,1] \right\rangle$ et $fog\left\langle]1,+\infty[\right\rangle$.

2. Déterminer : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)-3x$; $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)-x^2$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{gof^2(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f\left(\dfrac{\sin x}{2x}\right)$

3. a. Déterminer l'ensemble de définition de fof .

b. Montrer que la courbe de fof admet au moins admet une asymptote horizontale au voisinage de $-\infty$

4.Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On note la fonction : $f_n = \underbrace{fofo........of}_{n\ fois}$.

a. Déterminer : $\lim\limits_{x\to+\infty} f_5(x)$.

b. En déduire que pour tout $k\in\mathbb{N}$, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} f_{5+2k}(x) = -1$

5. a. déterminer l'ensemble de définition de $\dfrac{1}{f}$.

b. Dresser le tableau de variation de $\dfrac{1}{f}$.

c. $\frac{1}{f}$ est elle prolongeable par continuité en (-2) .

d. Déterminer $\frac{1}{f}\langle]-1,1[\rangle$.

6. Soit g_1 la restriction de de g sur l'intervalle $[4,+\infty[$ et C_{g_1} sa courbe représentative dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ dans l'annexe , on a construit dans le même ~~repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ la courbe de f et la courbe~~ de g_1 et la droite $(y=x)$. On pose φ la fonction définie sur $[4,+\infty[$ par $\varphi = fog_1$

a. Montrer que φ est continue sur $[4,+\infty[$.

b. Déterminer : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\varphi(x)}{x}$ et interpréter le résultat .

c. Calculer $\varphi(4)$.

d. Soient A et B les points de la courbe de φ d'abscisses respectives 5 et 7 .

Construire sur l'annexe (Figure 1) les points A et B .

e. Donner l'allure de la courbe de φ .

7. soit $n\in\mathbb{N}^*$

a. Montrer que l'équation $f(x)=\frac{1}{n}$ admet dans $[1,2]$ une solution unique U_n.

b. Montrer que la suite (U_n) est décroissante .

c. Montrer que la suite (U_n) est convergente et déterminer sa limite .