Continuité

Limites

Dérivabilité

Prof: M<sup></sup>r Ben Brahim 4ème
Lycée Pilote Nabeul

**Résumé de cours**

## 1) Fonctions composées :

$x \xrightarrow{f} f(x) \xrightarrow{g} g(f(x))$, $\quad x \xrightarrow{g \circ f} g(f(x))$

$$\boxed{(g \circ f)(x) = g(f(x))}$$

Thé : si f est dérivable sur I et g est dérivable sur f(I) alors g o f est dérivable sur I . on a :

$\forall x \in I$
$$\boxed{(g \circ f)'(x) = (g(f(x)))' = f'(x)\, g'(f(x))}$$

## 2) Fonction $f(x) = \sqrt{U(x)}$ :

- f est définie sur I **si seulement si** U est définie et positive sur I.
- Théorème : Si U est dérivable et <u>strictement</u> positive sur I alors f est dérivable sur I .

$\forall x \in I \qquad \boxed{f'(x) = \dfrac{U'(x)}{2\sqrt{U(x)}}}$

## 3) Théorème des valeurs intermédiaires :

**Théorème 1 :** Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I
Soit a et b deux réels de I tels que a < b
Pour tout réel k compris entre f(a) et f(b) l'équation f(x) =k possède au moins une solution dans l'intervalle $[a,b]$.

**Théorème 2 :**

$\left.\begin{array}{l} \text{Si f continue sur } [a, b] \\ f(a)\, f(b) < 0 \end{array}\right\}$ alors il existe au moins un réel $\alpha \in \,]a, b[$ tel que $f(\alpha) = 0$
c'est a dire l'équation f(x) = 0 admet au moins une solution $\alpha$ dans $]a,b[$

## 4) Image d'un intervalle par une fonction continue et strictement monotone

| Si f est continue est str. ↗ | Si f est continue et str. ↘ |
|---|---|
| $f([a, b]) = [f(a), f(b)]$ | $f([a, b]) = [f(b), f(a)]$ |
| $f([a, b[) = [f(a), \lim\limits_{b^-} f[$ | $f([a, b[) = ]\lim\limits_{b^-} f, f(a)]$ |
| $f(]a, b]) = ]\lim\limits_{a^+} f, f(b)]$ | $f(]a, b]) = [f(b), \lim\limits_{a^+} f[$ |
| $f(]a, b[) = ]\lim\limits_{a^+} f, \lim\limits_{b^-} f[$ | $f(]a, b[) = ]\lim\limits_{b^-} f, \lim\limits_{a^+} f[$ |
| $f([a, +\infty[) = [f(a), \lim\limits_{+\infty} f[$ | $f([a, +\infty[) = ]\lim\limits_{+\infty} f, f(a)]$ |
| $f(]a, +\infty[) = ]\lim\limits_{a^+} f, \lim\limits_{+\infty} f[$ | $f(]a, +\infty[) = ]\lim\limits_{+\infty} f, \lim\limits_{a^+} f[$ |
| $f(]-\infty, a]) = ]\lim\limits_{-\infty} f, f(a)]$ | $f(]-\infty, a]) = [f(a), \lim\limits_{-\infty} f[$ |
| $f(]-\infty, a[) = ]\lim\limits_{-\infty} f, \lim\limits_{a^-} f[$ | $f(]-\infty, a[) = ]\lim\limits_{a^-} f, \lim\limits_{-\infty} f[$ |
| $f(IR) = f(]-\infty, +\infty[) = ]\lim\limits_{-\infty} f, \lim\limits_{+\infty} f[$ | $f(IR) = f(]-\infty, +\infty[) = ]\lim\limits_{+\infty} f, \lim\limits_{-\infty} f[$ |



## 5) Fonction bijective :

**Définition :**
$f : A \to B$ est bijective **si et seulement si** $\forall y \in B$ il existe un seul réel $x \in A$ tel que $f(x) = y$
$x \to y$

**Remarques :**

Si f est bijective alors son application réciproque $f^{-1}$ existe $\quad f^{-1} : B \to A$
$\qquad y \to x$

On a alors :
- $\forall x \in A$ on a $f^{-1}(f(x)) = x$
- $\forall y \in B$ on a $f(f^{-1}(y)) = y$
- $(x \in A$ et $f(x) = y) \Leftrightarrow y \in B$ et $x = f^{-1}(y)$ $\qquad x \underset{f^{-1}}{\overset{f}{\rightleftarrows}} y$

**Théorème :**
Soit f une fonction <u>strictement monotone</u> sur I on a alors :
- f est bijective de I sur f(I) .
- f et $f^{-1}$ ont le même sens de variation.
- Cf et $Cf^{-1}$ sont symétrique par rapport à $\Delta : y = x$ .
- Si de plus f est continue sur I alors $f^{-1}$ est continue sur f( I ) .

$M(x, y) \xrightarrow{S_\Delta} M'(y, x)$

## 6) Dérivabilité de $f^{-1}$

**Théorème 1 :** Soit $f : A \longrightarrow B$ bijection
$\qquad x_0 \longrightarrow y_0$

$\left.\begin{array}{l} \text{Si f est dérivable en } x_0 \\ f'(x_0) \neq 0 \end{array}\right\}$ alors $f^{-1}$ est dérivable en $y_0 = f(x_0)$ et on a :

$$\boxed{(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}}$$

**Théorème 2:** Soit $f : A \longrightarrow B$ bijection
$\qquad y \longrightarrow x$

$\left.\begin{array}{l} \text{Si f est dérivable sur I} \\ \text{et} \\ f'(y) \neq 0 \text{ pour tout } y \in I \end{array}\right\}$ alors $f^{-1}$ est dérivable sur f (I) et on a : $\forall x \in I$

$$\boxed{(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(y)}} \quad \text{avec } y = f^{-1}(x)$$

**Théorème :**
Soit $h(x) = (f(x))^r \quad r \in Q$
- Si f est continue et positive sur I alors h est continue sur I
- Si f est dérivable et strictement positive sur I alors h est dérivable sur I.

$\forall x \in I,\ h'(x) = r\, f'(x) f^{r-1}(x)$

Remarque: $h(x) = \sqrt[n]{f(x)} = (f(x))^{\frac{1}{n}}$

$R(O,\vec{i},\vec{j})$ et un repère orthonormé

**Exercice 1 :** On considère les fonction f et g définie sur IR par :

$f(x) = x^4 - 6x^2 + 20x$ et $g(x) = x^3 - 3x + 5$

1) Dresser le tableau de variation de g.
2) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution sur IR et que $\alpha \in \, ]-3, -2[$ .
3) En déduire le signe de g(x).
4) Montrer que $f(\alpha) = -3\alpha^2 + 15\alpha$  5) Dresser le tableau de variation de f

**Exercice 2 :** Soit la fonction f définie sur $]-\infty, 0]$ par $f(x) = 2 - \sqrt{x^2 - x}$

1) Etudier la dérivabilité de f sur Df et dresser son tableau de variation
2) Montrer que f admet une fonction réciproque $f^{-1}$
3) Tracer Cf et C $f^{-1}$ dans le repère R  4) Déterminer l'expression de $f^{-1}(x)$.

**Exercice 3 :** $f : ]-1, 1[ \to IR \quad x \to tg(\frac{\pi}{2}x)$.

1) Montrer que f réalise une bijection de ]-1, 1[ sur un intervalle J.
2) Etudier la parité de $f^{-1}$ .
3) Soit C la courbe de f et C ' la courbe de g avec $g(x) = f^{-1}(-x)$ , $x \in IR$.
   Montrer que $C' = r(C)$ avec r est une rotation que l'on précisera.

**Exercice 4 :** Soit la fonction f définie sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ par $f(x) = tg\, x$

I. 1) Montrer que f réalise une bijection de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ sur un intervalle J que l'on précisera. (on note g sa fonction réciproque).

2) Montrer que g est dérivable sur J et calculer g'(x).
3) Montrer que g est impaire.
4) Montrer que pour tout $x \in [0, +\infty[$ on a $0 \le x - g(x) \le \frac{x^3}{3}$
5) En déduire $\lim\limits_{x\to 0} \frac{g(x) - x}{x^2}$

II. 1)Montrer que $\forall x > 0 \quad g(x) + g(\frac{1}{x}) = \frac{\pi}{2}$ et que pour tout $x < 0 \quad g(x) + g(\frac{1}{x}) = -\frac{\pi}{2}$.

2) Soit $U_n$ et $V_n$ deux suites définie par : $U_n = \frac{1}{n+1}(g(n) + g(n+1) + \ldots + g(2n))$

$$V_n = \frac{1}{n+1}\left(g(\frac{1}{n}) + g(\frac{1}{n+1}) + \ldots + g(\frac{1}{2n})\right).$$

a) Montrer que pour tout $n \in IN^*$ , $g(n) \le U_n \le g(2n)$.
b) Déduire que la suite U est convergente et calculer sa limite.
c) Montrer que V est convergente et calculer sa limite.

**Exercice 5 :** Soient n un entier naturel supérieur ou égal à 2 et $f_n$ la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par :

$f_n(x) = x^n - x - 1$

1)Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha_n$ dans $]0, +\infty[$ et que $\alpha_n > 1$.
2)Prouver que la suite $(\alpha_n)$ est décroissante ; en déduire $(\alpha_n)$ est convergente .
3) Montrer que pour tout $a > 0$ ona $(1+a)^n \ge 1 + na$ et en déduire que $f_n(1+\frac{3}{n}) > 0$
4)Donner alors un encadrement de $\alpha_n$ , en déduire $\lim \alpha_n$

**Exercice 6 :** Soit h une fonction continue et strictement croissante sur $[0, +\infty[$ tel que $f([0, +\infty[) = [0, 1[$

1) Montrer que pour tout $n \in IN^* \setminus \{1\}$, l'équation $h(x) = \frac{1}{n}$ admet une unique solution $\alpha_n$ .
2) On définie la suite $(\alpha_n)$ définie sur $IN^* \setminus \{1\}$, Montrer que la suite $(\alpha_n)$ est convergente et [illegible] limite.

Exercice 6

$h([0;+\infty[) = [0;1[$

1/ $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$

d'où $\frac{1}{n} < 1$

on pose $h$ est continue et strictement croissante sur $[0;+\infty[$

alors $h$ réalise une bijection de $[0;+\infty[$ sur $[0;1[$

d'où $h(x) = \frac{1}{n}$ admet une unique solution $\alpha_n \in [0;1]$

2/ $(\alpha_n)_n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$

a) $h(\alpha_{n+1}) - h(\alpha_n) = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}$

$= \frac{-1}{n(n+1)} < 0$

d'où $h(\alpha_{n+1}) < h(\alpha_n)$

alors $\alpha_{n+1} < \alpha_n$

$\Rightarrow \alpha_n$ est décroissante.

b. $\left.\begin{array}{l}(\alpha_n) \text{ est décroissante} \\ \text{et } \alpha_n \geq 0\end{array}\right\} \Rightarrow (\alpha_n)$ est convergente.

Supposons que $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = \ell \in ]0;1]$

$h(\alpha_n) = \frac{1}{n}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} h(\alpha_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \iff \lim h(\alpha_n) = 0$

or si $\alpha_n \in h(\alpha_n) \neq 0$ absurde

d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = 0$.

Autre méthode:

$h(\alpha_n) = \frac{1}{n} \iff h^{-1}\left(\frac{1}{n}\right) = \alpha_n$

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0 \\ \\ \lim h^{-1}(x) = h^{-1}(0)\end{array}\right\}$ d'où $\lim h^{-1}\left(\frac{1}{n}\right) = h^{-1}(0)$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = h^{-1}(0)$

$h(0) = 0 \Rightarrow h^{-1}(0) = 0$

série "Bijection"

Exercice 15

$f_n(x) = x^3 + 3(n+1)x + 1$

1/ $f_n'(x) = 3x^2 + 3(n+1) > 0$

d'où $f_n$ est strict croissante

$f_n$ est continue sur $[-1, 0]$

$\left.\begin{array}{l} f_n(0) = 1 > 0 \\ f_n(-1) = -3 - 3n < 0 \end{array}\right\}$ $f_n(0) \cdot f(-1) < 0$

d'où $f_n(x) = 0$ admet au moins une solution $\alpha_n \in [-1, 0]$

or $f_n$ est strict croissante

donc $\alpha_n$ est unique.

2/ $f_n(\alpha_n) = 0$

$f_{n+1} - f_n = 3n + 6 - 3n - 3 = 3$

$f_{n+1} - f_n > 0$

$f_{n+1} > f_n \iff f_{n+1}(\alpha_{n+1}) > f_n(\alpha_{n+1})$

$\iff f_n(\alpha_n) > f_n(\alpha_{n+1})$ or $f_n$ croissante

d'où $\alpha_{n+1} < \alpha_n$

donc $\alpha_n$ est croissante.

3) $\alpha_n$ est croissante $\Rightarrow (\alpha_n)$ est convergente

et $\alpha_n < 0$

4) $f_n(\alpha_n) = 0 \iff \alpha_n^3 + 3(n+1)\alpha_n + 1 = 0$

$\iff \alpha_n\left(\alpha_n^2 + 3(n+1)\right) = -1$

$\iff \alpha_n = \dfrac{-1}{\alpha_n^2 + 3(n+1)} \neq 0$

$\lim\limits_{n \to +\infty} \alpha_n = \lim \dfrac{-1}{\alpha_n^2 + 3(n+1)} = \dfrac{-1}{+\infty} = 0$

car $\alpha_n^2 \in [0, 1]$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} 3(n+1) = +\infty$

**Exercice 11** : Soit $f : [0, \pi] \to IR$ $\quad x \to \cos x$

1) Montrer que f est bijective de $[0, \pi]$ sur un intervalle J que l'on précisera.
2) Calculer $f^{-1}(\frac{1}{2})$ et $f^{-1}(0)$.
3) Déterminer le domaine de dérivabilité de $f^{-1}$ et $(f^{-1})'(x)$

**Exercice 12** : Soit la fonction f définie sur IR par $f(x) = x^3 + x^2 - 1$

1) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution c dans $]0, 1[$.
2) Donner un encadrement d'amplitude de $10^{-1}$ de c.

**Exercice 13** : On considère les fonction f et g définie sur IR par :

$f(x) = x^4 - 6x^2 + 20x$ et $g(x) = x^3 - 3x + 5$

1) Dresser le tableau de variation de g.
2) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une uni que solution $\alpha \in ]-3, -2[$.
3) Déterminer le signe de g(x).
4) Donner un encadrement de $\alpha$ à 0.1 prés
5) Dresser le tableau de variation de f
6) Montrer que $f(\alpha) = 3\alpha^2 + 15\alpha$

**Exercice 14** : Soit la fonction $f : IR \to IR$

$x \to x + \sqrt{1 + x^2}$

1) Etudier les variations de f.
2) Etudier les branches infinies de $C_f$.
3) Tracer $C_f$ dans un R. O. N. $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Préciser la tangente à $C_f$ au point d'abscisse 0.
4) a- Montrer que f admet une fonction réciproque que l'on déterminera.
   b- Construire $C_{f^{-1}}$ dans le même repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

**Exercice 14** : $f : [0, \frac{\pi}{2}[ \to IR$ , $x \to \sqrt{tgx}$

1) Montrer que f est dérivable sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ puis étudier la dérivabilité de f à droite en 0.
2) Dresser le tableau de variations de f et tracer $C_f$ dans un R.O.N $(o, \vec{i}, \vec{j})$.
3) Montrer que f admet une fonction réciproque g définie sur un intervalle J que l'on précisera.
4) Tracer $C_g$ dans un repère $(o, \vec{i}, \vec{j})$.
5) Montrer que g est dérivable sur $[0, +\infty[$ et que pour tout $x \in [0, +\infty[$, $g'(x) = \frac{2x}{x^4+1}$.
6) Montrer que pour tout $x \in ]0, +\infty[$ on a : $g(x) + g(\frac{1}{x}) = \frac{\pi}{2}$.
7) Soit la suite U définie sur IN* par : $U_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} g(n+k)$.
   a- Montrer que pour tout $n \in IN$ et pour tout $k \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$ on a : $g(n) \le g(n+k) \le g(2n)$.
   b- En déduire que $\forall_n \in IN^*$ on a : $g(n) \le U_n \le g(2n)$ puis déduire que U converge et calculer sa limite.

**Exercice 15 :**

Soit $f_n : IR \to I$ $\quad x \to x^3 + 3(n+1)x + 1 \quad (n \in IN)$

1) Etudier les variations de $f_n$.
2) Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admette une solution unique $\alpha_n$ sur IR.
3) On considère la suite $(\alpha_n)\ n \in IN$.
   a) Prouver que $\forall_n \in IN$ , $-1 < \alpha_n < 0$.
   b) Prouver que la suite $(\alpha_n)$ est croissante (en pourra calculer $f_{n+1}(\alpha_{n+1}) - f_{n+1}(\alpha_n)$)
   c) Prouver que la s...

Prof: M[r] Ben Brahim
Lycée Pilote Nabeul

4$^{ème}$

# Composée de deux fonctions-Bijection

**Exercice 1 :** Soit la fonction f définie sur IR par $f(x) = x^2 - 1$.
Déterminer l'image par f de chacun des intervalles :
$[-1, 0]$, $[0, 1]$, $[-1, 2]$, $[0, +\infty[$, $]-\infty, 0[$ IR, $[2, 5[$ et $[-2, -1[$.

**Exercice 2 :**
On considère la fonction $f : IR \to IR$, $x \to \cos x$ ; $g : IR \to IR$, $x \to \frac{2}{1+x^2}$ ; $h : IR \to IR$, $x \to 2\sqrt{x}$

Définir les fonctions : $f \circ g$, $g \circ f$, $g \circ h$ et $h \circ g$.

**Exercice 3 :** Déterminer deux fonctions f et g telle que : $h = g \circ f$.
a) $h(x) = \sqrt{x^2+1}$ b) $h(x) = \sin^3 x$ c) $h(x) = \cos(x^2 + x)$.

**Exercice 4 :**
1) Soit $h : IR \to IR$, $x \to \cos(2x^2 + 3x - 1)$. Montrer que h est continue sur IR.
2) Soit $g : IR \to IR$, $x \to \sin\left(\frac{2x^2-1}{x+1}\right)$. Montrer que g est continue sur $IR \setminus \{-1\}$.

**Exercice 5 :**
Dans chacun de ces cas déterminer $D_d$ et $h'(x)$
1) $h(x) = \cos(2x^2 + 3x + 7)$ 2) $h(x) = \sin\frac{1}{x}$ 3) $h(x) = \cos(\cos x)$

**Exercice 6 :**
Préciser le domaine de définition et le domaine de dérivabilité de f et calculer $f'(x)$.
1) $f : IR \to IR$, $x \to \sqrt{2x^2-3x+1}$ 2) $f : IR \to IR$, $x \to \sqrt{2-\cos x}$ $f : IR \to IR$, $x \to \sqrt{\frac{x+1}{x-2}}$

**Exercice 7 :** Soit $f : [-1, 2] \to IR$, $x \to x^2 + 2x - 4$
1) Montrer que f est une bijection de $[-1, 2]$ sue un intervalle J que l'on précisera.
2) Etudier la continuité de $f^{-1}$ et déterminer son sens de variation.
3) Expliciter $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$.
4) Construire $C_f$ et $C_{f^{-1}}$ dans un R. O. N. $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

**Exercice 8 :**
Soit $f(x) = x - \sin x$.
1) Montrer que f est bijective de IR sur IR
2) Montrer que l'équation $x - \sin x = 2$ admet une solution unique dans IR.

**Exercice 9 :**
Soit la fonction h définie sur IR par $f(x) = x^3 - 3x^2 - 1$.
1) Dresser le tableau de variation de f.
2) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $x_0$ sur IR et que $x_0 \in ]3, 4[$
3) Soit la fonction $g(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^3 + x + 1$. Dresser le tableau de variation de g.

**Exercice 10 :**
Soit $f : [0, +\infty[ \to IR$, $x \to x^2 + 3$
1) Montrer que f est bijective de $[0, +\infty[$ sur un intervalle J que l'on déterminera.
2) Démontrer que $f^{-1}$ est dérivable en 4 et calculer $(f^{-1})'(4)$.

Lycée pilote Nabeul
Prof : Mr Ben Brahim M.H
Série Bijection
Classes : 4ème Math

## Exercice 1 :

Soit f la fonction définie sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ par : $f(x)=\frac{2\sin x}{1-\sin x}$

$(\zeta)$ désigne sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1/ Etudier f et tracer $(\zeta)$.

2/ a) Montrer que f admet une fonction réciproque g définie sur $\mathbb{R}_+$. Déterminer g(0) et g(2).

b) Tracer le courbe représentative $(\zeta')$ de g dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$. En déduire la position de $(\zeta')$ par rapport à la droite $\Delta$ d'équation $y=x$.

c) Montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et que $g'(x)=\frac{1}{(2+x)\sqrt{1+x}}$

3/ Soit $(u_n)$ la suite définie par : $\begin{cases}u_0=2\\ \forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}=g(u_n)\end{cases}$.

a) Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N},\ 0\le u_n\le 2$.

b) Montrer que $(u_n)$ est décroissante, en déduire que $(u_n)$ est convergente et donner sa limite.

4/ Soit $(v_n)$ la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $v_n=n\left(g\left(u_n+\frac{2}{n}\right)-g\left(u_n+\frac{1}{n}\right)\right)$.

a) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, il existe $c_n\in\left]u_n+\frac{1}{n},u_n+\frac{2}{n}\right[$ tel que $v_n=\frac{1}{(2+c_n)\sqrt{1+c_n}}$

b) En déduire que $(v_n)$ est convergente et donner sa limite.

## Exercice 2 :

Soit f la fonction définie sur $I=]-1,+\infty[$ par : $f(x)=\frac{x+2}{\sqrt{x+1}}$

$(\zeta)$ désigne sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1/ a) Dresser le tableau de variation de f.

b) Montrer que : $\forall x\in\mathbb{R}_+,\ 0\le f'(x)\le\frac{1}{2\sqrt{x+1}}$, et que $0\le f'(x)\le\frac{1}{2}$.

2/ a) Montrer que l'équation $f(x)=x$ admet dans $\mathbb{R}_+$ une solution unique $\alpha$ et que $2,3<\alpha<2,5$

b) Tracer $(\zeta)$.

3/ Soit g la restriction de f sur $\mathbb{R}_+$

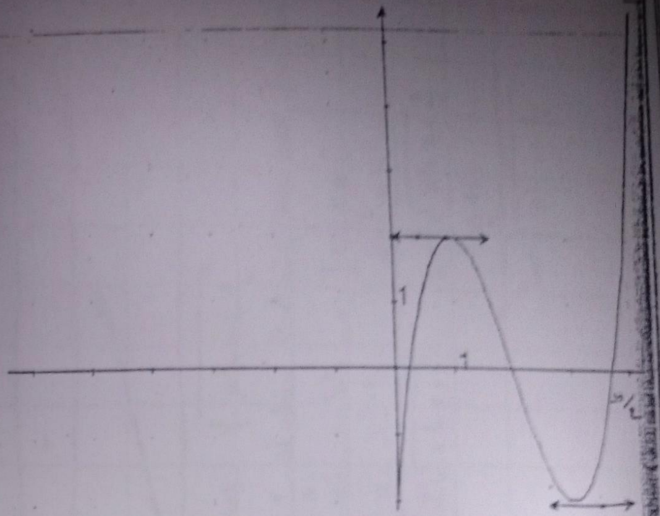
a) Montrer que g réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur un intervalle J que l'on déterminera.

b) Tracer la courbe représentative $(\zeta')$ de $g^{-1}$ dans le même repère que $(\zeta)$.

c) Montrer que : $\forall x\in J,\ g^{-1}(x)=\frac{2\sqrt{x^2-4}}{x-\sqrt{x^2-4}}$.

## Ex : 2

Le graphique donné ci-dessous est celui de $\zeta_f$ courbe représentative d'une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et ses tangentes aux points d'abscisses 2, 1 et 3.

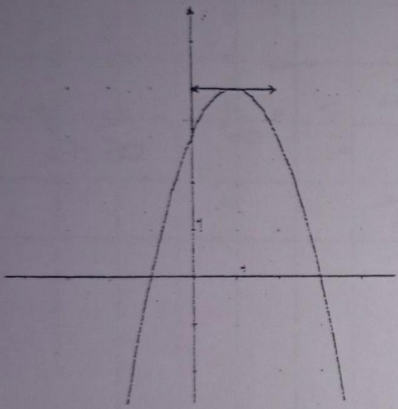



1) Déterminer f(1), f'(1) et f'(3).

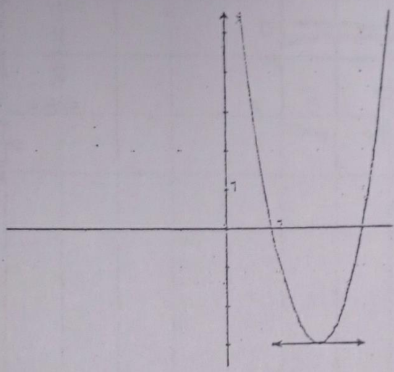
2) Résoudre graphiquement l'équation $f'(x) > 0$.

3) Déterminer $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(2+h)}{h}$.

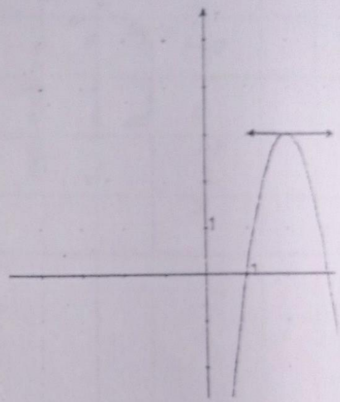
4) Parmi les trois courbes données ci-dessous, laquelle est la représentation graphique de f ' en justifiant votre choix.



A



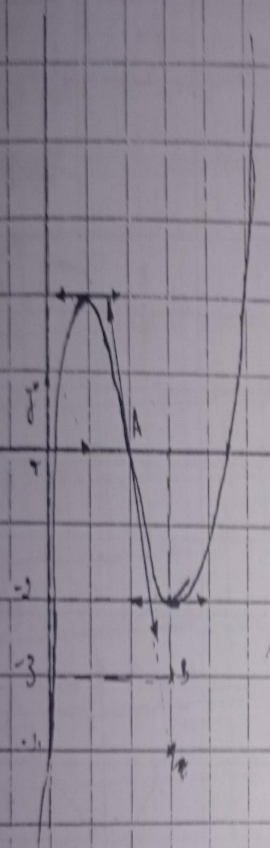
B



C

## Ex 2 : Lebron.

1)



1) $f(1) = 2$ ; $f'(1) = 0$ ; $f'(3) = 0$

2) $f'(x) > 0 \Rightarrow C_f$ est strictement ↗

$S = ]-\infty ; 1[ \cup ]3 ; +\infty[$

3) $\lim\limits_{h \to \infty} \frac{f(2+h)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h - 0} = f'(2)$

$f'(2) = m_{T_2} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-3 - 0}{3 - 2} = -3$

4) d'après $C_f$

| $x$ | $-\infty$ | | $1$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | ↗ | | ↘ | | ↗ | |
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

### suite d'exercice n°7 :

$g$ est continue sur $[0, 1]$ et $g(0) \cdot g(1) = -1 \times 2 = -2 < 0$ alors d'après T.V.I où $0 < \alpha < 1$

c) $g(\alpha)$ s'annule en $\alpha$

| $x$ | $-\infty$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |

2) $f(x) = \sqrt{x^2 + x + \frac{1}{x}}$ ; $D_f = D_{f'} = \mathbb{R}_+^*$

La fct $x \mapsto x^2 + x + \frac{1}{x}$ est dérivable

$f'(x) = \frac{2x + 1 - \frac{1}{x^2}}{2\sqrt{x^2 + x + \frac{1}{x}}}$ prend le signe de $\frac{g(x)}{x^2}$

$= \frac{\frac{2x^3 + x^2 - 1}{x^2}}{2\sqrt{x^2 + x + \frac{1}{x}}}$

| $x$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $f'(x)$ | ‖ | $+$ |
| $f(x)$ | ‖ | ↗ |

correction : $f(x) = \sqrt{x^2 + x + \frac{1}{x}}$

$x \longmapsto x^2 + x + \frac{1}{x}$ est dériv et strict $> 0$ sur $]0 ; +\infty[$

alors $f$ est dérivable sur $]0 ; +\infty[$

$\forall x > 0$ : $f'(x) = \frac{2x + 1 - \frac{1}{x^2}}{2\sqrt{x^2 + x + \frac{1}{x}}} = \frac{2x^3 + x^2 - 1}{2x^2\sqrt{x^2 + x + \frac{1}{x}}}$

$= \frac{g(x)}{2x^2\sqrt{x^2 + x + \frac{1}{x}}}$

prende le signe de $g(x)$

| $x$ | $0$ | | $4$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $g(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $g(4)$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

2) a) $\lim\limits_{+\infty} f(x) - \left(x + \frac{1}{2}\right) = \lim\limits_{+\infty} \sqrt{x^2 + x + \frac{1}{x}} - x - \frac{1}{2}$

$= \lim\limits_{+\infty} \dfrac{\cancel{x^2} + x + \frac{1}{x} - \cancel{x^2} + \frac{1}{4}}{\sqrt{x^2 + x + \frac{1}{x}} + x - \frac{1}{2}}$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\cancel{x}\left(1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{4x^2}\right)}{\cancel{x}\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}} + 1 + \frac{1}{2x}} = \frac{1}{2} \neq 0$

$\Rightarrow$ $C_f$ admet une asymptote oblique d'éq : $D : y = x + \frac{1}{2}$ au voisinage de $+\infty$.

b) La position relative de $C_f$ par rapport à $D$ est donnée par le signe de $f(x) - y$

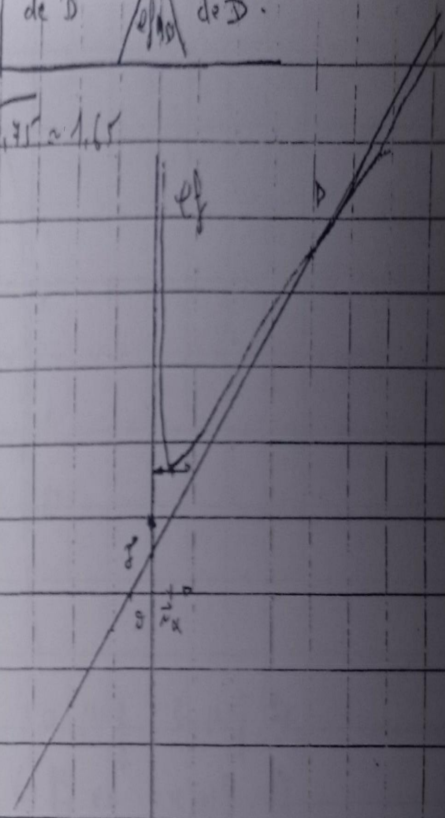
$\forall x > 0$ : $f(x) - y = \sqrt{x^2 + x + \frac{1}{x}} - \left(x + \frac{1}{2}\right)$

$= \dfrac{x^2 + x + \frac{1}{x} - \left(x + \frac{1}{2}\right)^2}{\sqrt{x^2 + x + \frac{1}{x}} + x + \frac{1}{2}}$

$= \dfrac{\frac{1}{x} - \frac{1}{4}}{\underbrace{\sqrt{x^2 + x + \frac{1}{x}} + x + \frac{1}{2}}_{> 0}} = \dfrac{4 - x}{\underbrace{4x\,D}_{> 0}}$

| $x$ | $0$ | | $4$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x) - y$ | | $+$ | | $-$ | |
| | | $C_f$ au-dessus de $D$ | $C_f \cap D$ | $C_f$ au-dessous de $D$. | |

c) $f(x) = \sqrt{2,75} \simeq 1,65$



## Exercice 7 :

1) a) $g(x) = 2x^3 + x^2 - 1$ ; $D_g = D_{g'} = \mathbb{R}$

$g$ est dérivable sur $\mathbb{R}$

$g'(x) = 6x^2 + 2x$

$6x^2 + 2x = 0$

$x(6x+2) = 0$

$x = 0$ ou $x = \frac{-2}{6} = \frac{-1}{3}$

| $x$ | $-\infty$ | | $-1/3$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $g(x)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $-0,9$ | $\searrow$ | $-1$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

b) sur $]-\infty, 0]$ ; on a $f(-\frac{1}{3})$ est le maximum de $f(x)$

$\Rightarrow \forall x \in ]-\infty ; 0]$ : $f(x) \leq \frac{-12}{13}$

$\Rightarrow$ l'éq $f(x) = 0$ n'admet pas de solution sur $]-\infty, 0]$

• $g$ est continue et $\nearrow$ sur $[0 ; +\infty[$

$\Rightarrow g([0 ; +\infty[) = [-1 ; +\infty[$

or $0 \in [-1 ; +\infty[$ alors l'éq $g(x) = 0$ admet au moins une solution $\alpha$ dans $[0 ; +\infty[$

or $g$ est strictement $\nearrow$ sur $[0 ; +\infty[$ alors $\alpha$ est unique

$\rightarrow$ suite

## Ex 6 :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{\pi^2 x + \sqrt{1-x}}{|x|+1} & \text{si } x \leq 1 \\ f(x) = \dfrac{1+\cos(\pi x)}{(x-1)^2} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

1) a) $\lim\limits_{1^-} f(x) = \lim\limits_{1^-} \frac{\pi^2 x + \sqrt{1-x}}{|x|+1} = \frac{\pi^2}{2}$

$\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} \frac{1+\cos(\pi x)}{(x-1)^2} = \frac{0}{0}$ F.I

on prend $h = x - 1 \Rightarrow x = h + 1$

si $x \to 1^+$ équi $h \to 0^+$

$= \lim\limits_{h \to 0^+} \frac{1+\cos(\pi(h+1))}{(h+1-1)^2}$

$= \lim\limits_{h \to 0^+} \frac{1+\cos(\pi h + \pi)}{h^2}$

$= \lim\limits_{h \to 0^+} \frac{1-\cos \pi h}{h^2} = \frac{\pi^2}{2}$

d'où $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \frac{\pi^2}{2} = f(1)$

d'où $f$ est continue en 1.

b) $\lim\limits_{+\infty} f(x) = \lim\limits_{+\infty} \frac{1+\cos(\pi x)}{(x-1)^2}$

$\forall x > 1$ ; $-1 \leq \cos \pi x \leq 1$

~~$-\pi \leq \cos(\pi x) \leq \pi$~~ $\Leftrightarrow$ $0 \leq 1 + \cos(\pi x) \leq 2$

$0 \leq 1 + \cos(\pi x) \leq 2$

$0 \leq f(x) \leq \dfrac{2}{(x+1)^2}$

$\lim\limits_{+\infty} \dfrac{2}{(x-1)^2} = 0$

d'où $\lim\limits_{+\infty} f(x) = 0$

c/ $\lim\limits_{-\infty} \dfrac{\pi^2 x + \sqrt{1-x}}{|x|+1} = \lim\limits_{-\infty} \dfrac{\pi^2 x + \sqrt{1-x}}{-x+1}$

$= \lim\limits_{-\infty} \dfrac{-x\left(-\pi^2 - \sqrt{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}}\right)}{-x\left(1 - \frac{1}{x}\right)} = -\pi^2$

correction $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\pi^2 x + \sqrt{1-x}}{|x|+1} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\pi^2 x + \sqrt{1-x}}{-x+1}$

$= \lim\limits_{X \to +\infty} \dfrac{-\pi^2 X + \sqrt{1+X}}{X+1}$ on pose $X = -x$

$x \to -\infty$ et $X \to +\infty$

$= \lim\limits_{X \to +\infty} \dfrac{X\left(-\pi^2 + \sqrt{\frac{1}{X^2} + \frac{1}{X}}\right)}{X\left(1 + \frac{1}{X}\right)} = -\pi^2$

et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\pi^2$

$\mathcal{C}_f$ admet une A.H de droite d'éq $y = -\pi^2$ au voisinage de $-\infty$.

2)a) $f$ est strictement $\searrow$ sur $[1, 3]$

④ $f(x) = 4x \iff f(x) - 4x = 0$

$\iff g(x) = 0$ avec $g(x) = f(x) - 4x$

- on a $g$ est continue en $1^+$
- on montre que $g$ est continue sur $\left]1, \frac{4}{3}\right]$

d'où $g$ est continue sur $\left[1, \frac{4}{3}\right]$

$g(1) = f(1) - 4 = \frac{\pi^2}{2} - 4 > 0$

$g\left(\frac{4}{3}\right) = f\left(\frac{4}{3}\right) - \frac{16}{3} = -\frac{5}{6} < 0$

D'après le T.V.I. l'éq $g(x) = 0$ admet au moins une solution $\alpha \in \left]1, \frac{4}{3}\right[$

- on montre que $g$ est dérivable sur $\left]1, \frac{4}{3}\right[$

$\forall x \in \left]1, \frac{4}{3}\right[$ ; $g'(x) = \underbrace{f'(x)}_{<0} - 4 < 0$

et $g$ est strictement $\searrow$ sur $\left]1, \frac{4}{3}\right[$

alors $\alpha$ est unique.

a) : $a < b \Rightarrow f(a) > f(b)$ , $a < b \Rightarrow -4a > -4b$

$f(a) - 4a > f(b) - 4b$

$g(a) > g(b)$