Lycée pilote de Tunis	**Limite-continuité 2**	Terminales maths & S-Exp
Mr Ben Regaya. A	**+ Eléments de corrections**	www.ben-regaya.net

Exercice1

1. Montrer que l'équation $8x^3+6x-1=0$ admet une solution unique a et que $a\in\left]0,\frac{1}{2}\right[$.

2. Soit la fonction f définie par $f(x)=2x^4+3x^2-x-1$.

   a) Dresser le tableau de variation de f.

   b) Montrer que $f(a)=\frac{3}{2}a\left(a-\frac{1}{2}\right)-1$ et que $-\frac{11}{8}\prec f(a)\prec -1$.

3. a) Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet dans $\mathbb{R}$ deux solution x_1 et x_2 telles que $x_1\prec a\prec x_2$.

   b) Préciser le signe de $f(x)$ pour tout réel x.

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x)=\dfrac{\pi^2 x+\sqrt{1-x}}{|x|+1} & si\ x\le 1 \\ f(x)=\dfrac{1+cos(\pi x)}{(x-1)^2} & si\ x\succ 1\end{cases}$

1. a) Montrer que f est continue en 1.
   b) Déterminer la limite de f en $+\infty$. Interpréter graphiquement le résultat.

   c) Etudier la nature de la branche infinie de la courbe de f au voisinage de $-\infty$.

2. a) On admet que f est strictement décroissante sur $I=[1;3]$. Montrer que l'équation $f(x)=4x$ admet dans I une seule solution a et que $1\prec a\prec\frac{4}{3}$.

   b) Lequel des intervalles $\left]1,\frac{7}{6}\right[$ et $\left]\frac{7}{6},\frac{4}{3}\right[$ contient-il a ?

Exercice 3

1. Montrer que pour tout réel $x\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$, on a $sin\,x\prec x\prec tan\,x$

2. Montrer que pour tout réel $x\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$, $0\prec\frac{1}{sinx}-\frac{1}{x}\prec\frac{1-cosx}{sinx}$.

3. En déduire la valeur de $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{sinx}-\frac{1}{x}$.

Exercice 4

On considère la fonction g définie dans l'intervalles $I=[0,\pi]$ par : $g(x)=cos(2x)+2x\,sin(2x)$.

1. a) Etudier les variations de g sur I.
   b) En déduire que l'équation $g(x)=0$ admet dans I exactement deux solutions notées :

   a et b (avec $a\prec b$). Vérifier que : $\frac{\pi}{4}\prec a\prec\frac{\pi}{2}$ et $\frac{3\pi}{4}\prec b\prec\pi$.

   c) déterminer le signe de $g(x)$ sur I.

2. On considère la fonction f définie dans $J=]0,\pi]$ par : $f(x)=\frac{cos(2x)}{x}$.

   Utiliser 1) c) pour étudier les variations de f sur l'intervalle J.

Exercice 5

Pour n entier naturel non nul on définit sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ la fonction f_n par : $f_n(x)=x-n\tan x$.

1. a) Montrer que pour tout entier naturel n non nul l'équation $f_n(x)=-n$ admet dans $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ une solution unique qu'on note u_n.

   b) Vérifier que pour n naturel non nul $u_n\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right[$ et que $\tan\left(u_n\right)=1+\frac{u_n}{n}$.

2. a) Montrer que pour tout entier naturel n non nul et pour tout réel x de $\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right[$ on a : $1+f_{n+1}(x)\prec f_n(x)$.

   b) Déduire que la suite $\left(u_n\right)$ est strictement décroissante et qu'elle converge vers une limite que l'on précisera.

Exercice 6

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$. La figure ci-dessous est la représentation graphique (C) d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ continue en tout réel non nul et telle que les droites $x=0$ et D sont des asymptotes à (C). On note aussi que (C) admet une branche infinie parabolique de direction $\left(O,\vec{i}\right)$ au voisinage de $+\infty$ et que l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique le réel $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

1. a) Déterminer a partir du graphique :

   $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)+2x\right)$.

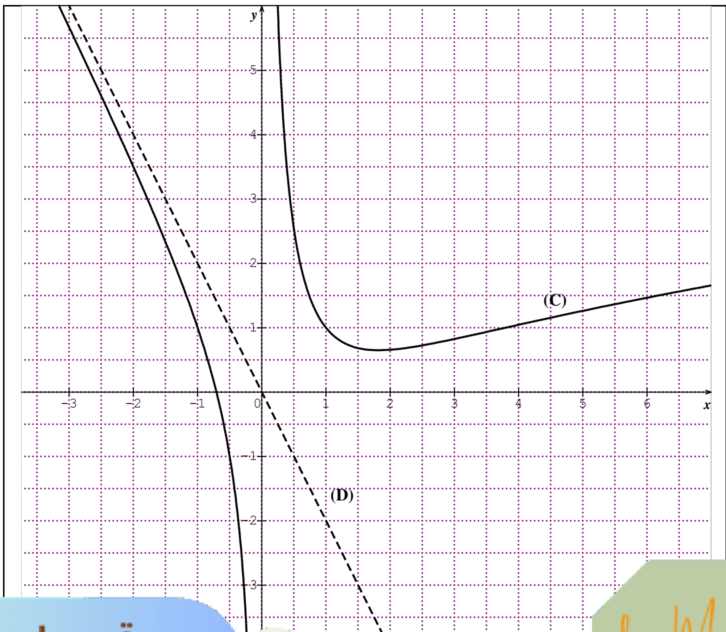
   b) Calculer les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to0^+}f\left(\frac{1}{x}\right)$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)-2x}{x\sqrt{-x}}$ et $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sin\left(1-f(x)\right)}{\sqrt{f(x)}}$.

2. Déterminer l'ensemble de définition de $f\circ f$ puis calculer $\lim\limits_{x\to-\infty}f\circ f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f\circ f(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x\to0^+}\left(f\circ f(x)-\left[f^2(x)\right]\right)$.

3. Soit φ la fonction définie sur $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$ par : $\begin{cases}\varphi(x)=\cos x.f\left(\frac{1}{\cos x}\right);x\in\left]\frac{\pi}{2},\pi\right]\\ \varphi\left(\frac{\pi}{2}\right)=-2\end{cases}$

   a) Montrer que φ est continue sur $\left]\frac{\pi}{2},\pi\right]$.

   b) φ est elle continue à droite en $\frac{\pi}{2}$?



Lycée pilote de Tunis	Limite-continuité 2	Terminales maths & S-exp
Mr Ben Regaya. A	Eléments de correction	www.ben-regaya.net

Exercice1

1. Posons $g(x)=8x^3+6x-1$. g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $g'(x)=24x^2+6\succ 0$ g est alors strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

   $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} 8x^3=+\infty$ *et* $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} 8x^3=-\infty$ donc $g(\mathbb{R})=\mathbb{R}$ .Comme $0\in g(\mathbb{R})$ alors l'équation $g(x)=0$ admet au moins une solution a dans $\mathbb{R}$.

   Encadrement de *a* :

   Vérifier que $g(0)\times g\left(\frac{1}{2}\right)\prec 0$ et conclure que $a\in\left]0,\frac{1}{2}\right[$.

2. a) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $f'(x)=8x^3+6x-1=g(x)$. Or g s'annule en a et elle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, donc sur $]-\infty,a[$ $g(x)\prec 0$ et sur $]a,+\infty[$ $g(x)\succ 0$ .Ainsi f est strictement croissante sur $]a,+\infty[$ et strictement décroissante sur $]-\infty,a[$ .Dresser le tableau de variation de f.

   b) On sait que $g(a)=0$ donc $8a^3+6a-1=0\Leftrightarrow a^3=\frac{1-6a}{8}$.

   Or $f(a)=2a^4+3a^2-a-1=2a\left(\frac{1-6a}{8}\right)+3a^2-a-1=\left(\frac{a-6a^2}{4}\right)+3a^2-a-1$

   $=\left(\frac{a-6a^2}{4}\right)+3a^2-a-1=\frac{a}{4}-\frac{3}{2}a^2+3a^2-a-1=\frac{3}{2}a^2-\frac{3}{4}a-1=\frac{3}{2}a\left(a-\frac{1}{2}\right)-1$.

   Ainsi $f(a)=\frac{3}{2}a\left(a-\frac{1}{2}\right)-1$

   On a $0\prec a\prec\frac{1}{2}\Leftrightarrow -\frac{1}{2}\prec a-\frac{1}{2}\prec 0\Leftrightarrow 0\prec\frac{1}{2}-a\prec\frac{1}{2}$ et $0\prec\frac{3}{2}a\prec\frac{3}{4}$ donc le produit donne

   $0\prec\frac{3}{2}a\left(\frac{1}{2}-a\right)\prec\frac{3}{8}\Leftrightarrow -\frac{3}{8}\prec\frac{3}{2}a\left(a-\frac{1}{2}\right)\prec 0\Leftrightarrow -\frac{11}{8}\prec\frac{3}{2}a\left(a-\frac{1}{2}\right)-1\prec -1\Leftrightarrow -\frac{11}{8}\prec f(a)\prec -1$.

3. Remarquons donc que $f(a)\prec 0$.

   Dans ces conditions $f\left(\left]-\infty,a\right]\right)=\left[f(a),+\infty\right[$ et donc puisque f est continue sur et que $0\in f\left(\left]-\infty,a\right]\right)$ alors l'équation $f(x)=0$ admet dans $\left]-\infty,a\right]$ une solution unique x_1 de même l'équation $f(x)=0$ admet dans $\left[a,+\infty\right[$ une solution unique x_2 et il est évident de voir que $x_1\prec a\prec x_2$.

   Donc sur $\left]-\infty,x_1\right]\cup\left[x_2,+\infty\right[$; $f(x)\geq 0$ et sur $\left[x_1,x_2\right]$; $f(x)\leq 0$.

Exercice 3

1. Posons $u(x)=sinx-x$. u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $u'(x)=cosx-1\leq 0$.

   Donc u est décroissante sur $]0,\dfrac{\pi}{2}[$ donc si $x\in]0,\dfrac{\pi}{2}[$ alors $u(x)\leq u(0)$ avec $u(0)=0$ ce qui donne $sinx\prec x$.

   Faites de même pour l'autre inégalité en tenant compte du fait que $tan'x=1+tan^2x$

2. On a $\dfrac{-1}{sinx}\prec\dfrac{-1}{x}\prec\dfrac{-cosx}{sinx}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{1}{sinx}-\dfrac{1}{x}\succ 0\\ \dfrac{-1}{x}+\dfrac{1}{sinx}\prec\dfrac{-cosx}{sinx}+\dfrac{1}{sinx}\end{cases}\Rightarrow 0\prec\dfrac{1}{sinx}-\dfrac{1}{x}\prec\dfrac{1-cosx}{sinx}$

   $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-cosx}{sinx}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1-cosx}{x}}{\frac{sinx}{x}}=0$ donc $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{sinx}-\dfrac{1}{x}=0$.

Exercice 4

1. a) La fonction g est restriction à $[0,\pi]$ d'une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ donc g est dérivable sur $[0,\pi]$

   Pour $x\in[0,\pi]$ $g'(x)=4xcos2x$.

   Or $cos2x=0\Leftrightarrow 2x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi\Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{k\pi}{2}$; $k\in\mathbb{Z}$. Comme $x\in[0,\pi]$ alors $x=\dfrac{\pi}{4}$ ou $x=\dfrac{3\pi}{4}$. Dresser

   le tableau de variations de g.

   b) La restriction de g à $\left[\dfrac{\pi}{4},\dfrac{3\pi}{4}\right]$ est continue et strictement décroissante $g\left(\left[\dfrac{\pi}{4},\dfrac{3\pi}{4}\right]\right)=\left[\dfrac{-3\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ qui

   contient 0 donc l'équation $g(x)=0$ admet dans $\left[\dfrac{\pi}{4},\dfrac{3\pi}{4}\right]$ une solution unique a.

   Même chose pour la solution b.

   Encadrement de a : $g\left(\dfrac{\pi}{2}\right)\times g\left(\dfrac{\pi}{4}\right)\prec 0$ donc $a\in]\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}[$ pareil pour b.

   c) g est positive sur chacun des intervalles $[0,a]$ et $[b,\pi]$ et g est négative sur $[a,b]$.

2. f est restriction à $]0,\pi]$ d'une fonction dérivable en tout réel non nul et

   $f'(x)=\dfrac{-2x\,sin2x-cos2x}{x^2}=-\dfrac{g(x)}{x^2}$. Dresser le tableau de variations de f.

Exercice 5

1. a) f_n est restriction a $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ d'une fonction dérivable en tout réel de $\mathbb{R}\backslash\left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi, k\in z\right\}$ donc f_n est

   dérivable sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ et $f_n'(x)=1-n(1+(tanx)^2)=1-n-n(tanx)^2\prec 0$ (En effet $n\in\mathbb{N}^*$). Donc f_n est

   strictement décroissante sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$. $f_n\left(\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[\right)=]-\infty,0]$ et $-n\in f_n\left(\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[\right)$ donc l'équation $f_n(x)=-n$

admet dans $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ une solution unique qu'on note u_n. On a donc $f_n(u_n)=-n$.

b) $f_n\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{4}-n$. $\quad -n\in f_n\left(\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right[\right)$ donc $u_n\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right[$.

On a $f_n(u_n)=-n \Leftrightarrow u_n-n\,tan(u_n)=-n \Leftrightarrow tan(u_n)=1+\frac{u_n}{n}$

2. a) $1+f_{n+1}(x)-f_n(x)=1-tanx$ or $x\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right[$ et la fonction tangente est croissante sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ donc $x\geq\frac{\pi}{4}\Rightarrow tanx\geq 1$ d'où $1+f_{n+1}(x)-f_n(x)\geq 0\Rightarrow 1+f_{n+1}(x)\leq f_n(x)$ pour $x\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right[$ et n non nul.

b) On a pour n naturel non nul $u_n\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right[$ donc $1+f_{n+1}(u_{n+1})\leq f_n(u_{n+1})\Leftrightarrow 1+(-n-1)\leq f_n(u_{n+1})$

$-n\leq f_n(u_{n+1})\Leftrightarrow f_n(u_n)\leq f_n(u_{n+1})$. Or f_n est décroissante sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ donc $u_n\geq u_{n+1}$ et la suite (u_n) est strictement décroissante.

(u_n) est décroissante et minorée par $\frac{\pi}{4}$ donc elle converge.

On a : $tan(u_n)=1+\frac{u_n}{n}$ or $\frac{\pi}{4}\leq u_n\prec\frac{\pi}{2}$ donc $\frac{\pi}{4n}\leq\frac{u_n}{n}\prec\frac{\pi}{2n}$ ce qui donne $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{u_n}{n}=0$. Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\frac{\pi}{4}$.

Exercice 6

1. a) La droite D à pour équation : $y=-2x$ est c'est une asymptote oblique à (C) au voisinage de - ∞ donc $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=-2$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

(C) admet une branche infinie parabolique de direction $(O,\vec{i})$ au voisinage de $+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0$

La droite D à pour équation : $y=-2x$ est c'est une asymptote oblique à (C) au voisinage de - ∞ donc $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)+2x)=0$.

b) $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{x}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ donc par composée $\lim\limits_{x\to0^+}f\left(\frac{1}{x}\right)=+\infty$.

On peut écrire pour x réel strictement négatif : $\frac{f(x)-2x}{x\sqrt{-x}}=\frac{f(x)+2x}{x\sqrt{-x}}+\frac{-4x}{x\sqrt{-x}}=\frac{f(x)+2x}{x\sqrt{-x}}+\frac{-4}{\sqrt{-x}}$ et

comme $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)+2x)=0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}x\sqrt{-x}=-\infty$ alors par quotient $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)+2x}{x\sqrt{-x}}=0$ et aussi

$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-4}{\sqrt{-x}}=0$ donc par somme $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)-2x}{x\sqrt{-x}}=0$.

On peut écrire pour $x\neq 1$ $\frac{sin(1-f(x))}{1-f^2(x)}=\frac{sin(1-f(x))}{1-f(x)}\times\frac{1}{1+f(x)}$.

f étant continue en 1donc $\lim\limits_{x\to1}\frac{1}{1+f(x)}=\frac{1}{2}$.

$\lim\limits_{x\to 1}(1-f(x))=0$ et $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ donc par composée $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(1-f(x))}{1-f(x)}=1$ et par produit $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(1-f(x))}{1-f^2(x)}=\dfrac{1}{2}$.

2. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ et $f(x)=0 \Leftrightarrow x=-\sqrt{2}$ donc l'ensemble de définition de $f\circ f$ est $\mathbb{R}\backslash\{-\sqrt{2},0\}$.

$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=+\infty$ donc par composée $\lim\limits_{x\to -\infty} f\circ f(x)=+\infty$.

On peut écrier pour $x \prec 0$; $\dfrac{f\circ f(x)}{x}=\dfrac{f\circ f(x)}{f(x)}\times\dfrac{f(x)}{x}$

$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0$ donc par composée $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{f\circ f(x)}{f(x)}=0$

$\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{f(x)}{x}=-2$ donc par produit $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{f\circ f(x)}{x}=0$.

On peut écrier pour $x\neq 0$; $\left(f\circ f(x)-\left[f^2(x)\right]\right)=f(x)\left(\dfrac{f\circ f(x)}{f(x)}-f(x)\right)$.

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0$ donc par composée $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f\circ f(x)}{f(x)}=0$ et comme $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$ on en déduit de l'écriture $f(x)\left(\dfrac{f\circ f(x)}{f(x)}-f(x)\right)$ que $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(f\circ f(x)-\left[f^2(x)\right]\right)=-\infty$.

3. a) La fonction cosinus étant continue sur $\mathbb{R}$

La fonction $u: x\mapsto \dfrac{1}{\cos x}$ est continue en tout réel distinct de $\dfrac{\pi}{2}+k\pi; k\in\mathbb{Z}$ en particulier sur $\left]\dfrac{\pi}{2},\pi\right]$ et elle est

a valeurs dans $]0,+\infty[$ et f est continue sur $]0,+\infty[$ donc pare composée la fonction $\omega: x\mapsto f\left(\dfrac{1}{\cos x}\right)$ est continue sur $\left]\dfrac{\pi}{2},\pi\right]$. Ainsi la fonction φ est continue sur $\left]\dfrac{\pi}{2},\pi\right]$.

b) Continuité de φ à droite en $\dfrac{\pi}{2}$.

Remarquons que pour $x\in\left]\dfrac{\pi}{2},\pi\right]$ on peut écrire $\varphi(x)=\dfrac{f\left(\dfrac{1}{\cos x}\right)}{\dfrac{1}{\cos x}}$.

$\lim\limits_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^+}\dfrac{1}{\cos x}=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{f(x)}{x}=-2$ donc par composée

$$\lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^+}\varphi(x)=\lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^+}\dfrac{f\left(\dfrac{1}{\cos x}\right)}{\dfrac{1}{\cos x}}=-2=\varphi\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$$ donc φ est continue à droite en $\dfrac{\pi}{2}$.

Conclusion : φ est continue à droite en $\dfrac{\pi}{2}$ et elle est continue sur $\left]\dfrac{\pi}{2},\pi\right]$ donc elle est continue sur $\left[\dfrac{\pi}{2},\pi\right]$.