Lycée pilote de Tunis	limite - Continuité 1	Terminales maths & SExp
Mr : Ben Regaya. A	+ Eléments de corrections	www.ben-regaya.net

Exercice 1

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(0) = f(1)$. Montrer qu'il existe $c \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ telle que :

$f(c) = f\left(c + \frac{1}{2}\right)$.

Exercice2

Etudier les limites suivantes :

$a)\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-2x+2}-x+1\right)$ $b)\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{\sqrt{x+1}}-\frac{x}{\sqrt{x+2}}\right)$ $c)\ \lim\limits_{x\to-\infty} x\sqrt{\frac{x+1}{x^3-1}}$ $d)\ \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x+\sqrt{4x^2+1}}{3x+1}$

$e)\ \lim\limits_{x\to 2}\frac{2x-1-\sqrt{2x^2+1}}{x^2-x-2}$ $f)\ \lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin x}{\cos x+\sin x-1}$ $g)\ \lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos 2x-\cos x}{x(\sin x+\sin 2x)}$ $h)\ \lim\limits_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^+}\frac{1-\tan x}{1+\tan x}$.

Exercice3

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{\sqrt{x^2-2x+2}-1}{x-\sin x}$ où $x \geq 1$.

1. Montrer que f est bien définie sur $[1,+\infty[$.
2. Montrer que pour tout réel x : $\sqrt{x^2-2x+2} \geq 1$.
3. Montrer que pour tout réel $x \succ 1$ on a : $\frac{\sqrt{x^2-2x+2}-1}{x+1} \leq f(x) \leq \frac{\sqrt{x^2-2x+2}-1}{x-1}$.
4. Déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

Exercice 4

1. Montrer que pour tout réel x : $\sqrt{x^2+1} \succ |x|$. En déduire que pour tout réel x, on a : $-\frac{1}{2} \prec -\frac{1}{4} + \frac{x}{4\sqrt{x^2+1}} \prec 0$.
2. Soit f la fonction définie par $f(x) = \tan\left(-\frac{\pi}{4} + \frac{\pi x}{4\sqrt{x^2+1}}\right)$.

   a) Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

   b) Calculer les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.

Exercice 5

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{x^3}{1-\cos x}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition D de f.

2. Montrer que $\forall x \in D \cap [0,+\infty[$ on a : $f(x) \geq \frac{x^3}{2}$. En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

3. Montrer que f admet un prolongement par continuité g en 0.

4. Etudier la dérivabilité de g en 0.

Exercice 6

Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[\setminus \{1\}$ par : $f(x) = \dfrac{x\sqrt{x}\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x-1}$.

1. Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$.

2. Soit $g(x) = f\left(\dfrac{1}{\cos x}\right)$. Calculer $\lim\limits_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-} g(x)$.

Exercice 7

Soit f la fonction définie par : $\begin{cases} f(x) = \sqrt{x^2+3x} - 3 & si\ x \prec 1 \\ f(x) = 2x - 3 + \dfrac{2}{x}\cos\left(\dfrac{\pi}{2}x\right) & si\ x \geq 1 \end{cases}$

1. Déterminer l'ensemble de définition D de f.

2. Montrer que f est continue sur D.

3. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans $]1,3[$.

4. Soit g la fonction définie sur $[0,1]$ par $g(x) = f\left(1 + \sin\left(\dfrac{\pi}{2}x\right)\right)$. Montrer que g est continue sur $[0,1]$.

Exercice8

Soit f la fonction définie sur $[-1,+\infty[$ par : $\begin{cases} f(x) = -1 + \sqrt{x+1}\,\sin\left(\dfrac{\pi}{x+1}\right) & si\ x \succ -1 \\ f(-1) = -1 \end{cases}$

1. Montrer que f est continue sur $[-1,+\infty[$.

2. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

3. a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution a dans $]0,1[$.

   b) Vérifier que $\tan\left(\dfrac{\pi}{a+1}\right) = -\dfrac{1}{\sqrt{a}}$

Exercice1

On pose pour cela $g(x)=f\left(x+\frac{1}{2}\right)-f(x)$.

La fonction f étant continue sur $[0;1]$ elle l'est donc sur $\left[0;\frac{1}{2}\right]$ et on a la fonction $u:x\mapsto x+\frac{1}{2}$ est polynôme continue sur $\mathbb{R}$ et $u\left\langle\left[0;\frac{1}{2}\right]\right\rangle=\left[\frac{1}{2};1\right]\subset[0;1]$ et comme f étant continue sur $[0;1]$ alors la fonction $f\circ u$ est continue sur $\left[0;\frac{1}{2}\right]$.

$g=f\circ u-f$ est alors continue sur $\left[0;\frac{1}{2}\right]$.

De plus $g(0)=f\left(\frac{1}{2}\right)-f(0)=f\left(\frac{1}{2}\right)-f(1)$ et $g\left(\frac{1}{2}\right)=f(1)-f\left(\frac{1}{2}\right)$ et on remarque tout de suite que $g(0)\times g\left(\frac{1}{2}\right)\leq 0$ donc par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $c\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$ telle que $g(c)=0\Leftrightarrow f\left(c+\frac{1}{2}\right)=f(c)$ c'est le résultat demandé.

Exercice 2

On rappelle dans tous ce qui suit que $\sqrt{x^2}=|x|=\begin{cases}x & si\ x\geq 0\\ -x & si\ x\leq 0\end{cases}$

a) A partir de l'expression conjuguée, on obtient : $\left(\sqrt{x^2-2x+2}-x+1\right)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-2x+2}+(x-1)}$ et donc

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-2x+2}-x+1\right)=0$$

b) x étant un réel strictement positif donc on peut écrire les égalités suivantes :

$$\left(\frac{x}{\sqrt{x+1}}-\frac{x}{\sqrt{x+2}}\right)=x\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+2}\sqrt{x+1}}=\frac{x}{\left(\sqrt{x+2}\,\sqrt{x+1}\right)\sqrt{x+2}\sqrt{x+1}}=$$

$$\frac{x}{\left(\sqrt{x}\sqrt{1+\frac{2}{x}}\,\sqrt{x}\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)\sqrt{x+2}\sqrt{x+1}}=\frac{1}{\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}}\,\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)\sqrt{x+2}\sqrt{x+1}}$$ et donc

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{\sqrt{x+1}}-\frac{x}{\sqrt{x+2}}\right)=0.$$

c) x étant un réel strictement négatif donc $x=-\sqrt{x^2}$ et par suite $x\sqrt{\dfrac{x+1}{x^3-1}}=-\sqrt{\dfrac{x^3+x^2}{x^3-1}}$ et comme

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^3+x^2}{x^3-1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^3}{x^3}=1$ alors $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{\dfrac{x^3+x^2}{x^3-1}}=1$ et finalement $\lim\limits_{x\to-\infty}x\sqrt{\dfrac{x+1}{x^3-1}}=-1$

d) x étant un réel strictement positif , on peut écrire : $\dfrac{2x+\sqrt{4x^2+1}}{3x+1}=\dfrac{2+\sqrt{4+\dfrac{1}{x^2}}}{3+\dfrac{1}{x}}$ et donc

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x+\sqrt{4x^2+1}}{3x+1}=\dfrac{4}{3}$

e) A partir de l'expression conjuguée et en tenant compte que $x^2-x-2=(x+1)(x-2)$, on peut écrire :

$\dfrac{2x-1-\sqrt{2x^2+1}}{x^2-x-2}=\dfrac{2x}{(x+1)\left(2x-1+\sqrt{2x^2+1}\right)}$ et donc $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{2x}{(x+1)\left(2x-1+\sqrt{2x^2+1}\right)}=\dfrac{2}{9}$

f) x étant un réel non nul, en divisant par x on obtient $\dfrac{2sinx}{cosx+sinx-1}=\dfrac{2\dfrac{sinx}{x}}{\dfrac{cosx-1}{x}+\dfrac{sinx}{x}}$ or

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2\dfrac{sinx}{x}}{\dfrac{cosx-1}{x}+\dfrac{sinx}{x}}=2$ donc $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2sinx}{cosx+sinx-1}=2$.

g) on rappel que $cos2x=2cos^2x-1$ donc $\dfrac{cos2x-cosx}{x(sinx+sin2x)}=\dfrac{2cos^2x-cosx-1}{x(sinx+2cosx\,sinx)}=\dfrac{2\left(cosx+\dfrac{1}{2}\right)(cosx-1)}{x\,sinx(1+2cosx)}$

$=\dfrac{2\left(cosx+\dfrac{1}{2}\right)\times\dfrac{cosx-1}{x^2}}{\dfrac{sinx}{x}(1+2cosx)}$ et comme $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{cosx-1}{x^2}=-\dfrac{1}{2}$ alors $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{cos2x-cosx}{x(sinx+sin2x)}=-\dfrac{1}{2}$

h) $f(x)=\dfrac{1-tanx}{1+tanx}$ Remarquer que $f=u\circ tan$ avec $u(x)=\dfrac{1-x}{1+x}$.

$\lim\limits_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^+}tanx=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1-x}{1+x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-x}{x}=-1$ donc $\lim\limits_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^+}\dfrac{1-tanx}{1+tanx}=-1$

Exercice3

1. On a $x^2-2x+2\succ0\quad\forall x\in\mathbb{R}$. En effet son discriminant est strictement négatif.
   Posons $u(x)=x-sinx$ u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $u'(x)=1-cosx\geq0$ donc u est croissante sur $\mathbb{R}$ et par suite

   Si $x\geq1\Rightarrow u(x)\geq u(1)=1-sin1\succ0$

   Ainsi $\forall x\geq1;\quad u(x)\succ0$ et donc $x-sinx\succ0\quad\forall x\geq1$. f est alors bien définie sur $[1,+\infty[$.

2. $\sqrt{x^2-2x+2}=\sqrt{(x-1)^2+1}\geq1$.

3. Utiliser le fait que $\forall x\in\mathbb{R}\ -1\leq-sinx\leq1\Leftrightarrow x-1\leq x-sinx\leq x+1$ et comme $x\succ1$ alors $x-1\succ0$ et donc

   $\dfrac{1}{x+1}\leq\dfrac{1}{x-sinx}\leq\dfrac{1}{x-1}$ et comme $\sqrt{x^2-2x+2}-1\geq0$, en multipliant les membres de l'inégalité précédentes,

   on obtient : $\dfrac{\sqrt{x^2-2x+2}-1}{x+1}\leq f(x)\leq\dfrac{\sqrt{x^2-2x+2}-1}{x-1}$.

Pour x réel strictement positif : $\dfrac{\sqrt{x^2-2x+2}-1}{x+1}=\dfrac{\sqrt{1-\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}}}{1+\frac{1}{x}}$ et donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-2x+2}-1}{x+1}=1$ et on a aussi $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-2x+2}-1}{x-1}=1$ et par comparaison $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1$.

Exercice 4

1. $\forall x\in\mathbb{R}\ \ x^2+1\succ x^2\Rightarrow\sqrt{1+x^2}\succ|x|$.

   Déduction : On a $\forall x\in\mathbb{R}\ \ \sqrt{1+x^2}\succ|x|\Leftrightarrow-\sqrt{1+x^2}\prec x\prec\sqrt{1+x^2}$

   $\Leftrightarrow\forall x\in\mathbb{R}\ \ -1\prec\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\prec1\ \Leftrightarrow\forall x\in\mathbb{R}\ \ -\dfrac{1}{2}\prec-\dfrac{1}{4}+\dfrac{x}{4\sqrt{1+x^2}}\prec0$

2. a) Remarquons que $f=tan\circ u$ avec $u(x)=-\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi x}{4\sqrt{x^2+1}}$ avec $\boxed{-\dfrac{\pi}{2}\prec u(x)\prec0}$

   On a u est définie et continue sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\left]-\dfrac{\pi}{2},0\right[$ (c'est a dire $u(\mathbb{R})\subset\left]-\dfrac{\pi}{2},0\right[$).

   La fonction tangente étant définie et continue sur $\left]-\dfrac{\pi}{2},0\right[$ alors f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

   b) $x\succ0\Rightarrow u(x)=-\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{4\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$ et donc $\lim\limits_{x\to+\infty}u(x)=0$. Comme $\lim\limits_{x\to0}tan(x)=0$ alors $\lim\limits_{x\to0}f(x)=0$

   $x\prec0\Rightarrow u(x)=-\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\pi}{4\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$ et donc $\lim\limits_{x\to-\infty}u(x)=-\dfrac{\pi}{2}$ et $-\dfrac{\pi}{2}\prec u(x)\prec0$

   Comme $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}^+}tan(x)=-\infty$ alors $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$.

Exercice 5

1. $D=\{x,x\in\mathrm{R}\ et\ 1-cosx\neq0\}=\mathbb{R}\backslash\{2k\pi,\ \ k\in Z\}$.

2. On a $\forall x\in\mathbb{R}\ \ -1\leq-cosx\leq1\ \ \Leftrightarrow\ \ \forall x\in\ D\cap\mathbb{R}+\ \dfrac{1}{2}\leq\dfrac{1}{1-cosx}\ \ \Leftrightarrow\ \ \forall x\in\ D\cap\mathbb{R}+\ \ f(x)\geq\dfrac{x^3}{2}$

   $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3}{2}=+\infty\Rightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

3. Pour x réel non nul $f(x)=\dfrac{x^3}{1-cos\,x}=\dfrac{x}{\frac{1-cosx}{x^2}}\to\dfrac{1}{\frac{1}{2}}=2$. Donc f est prolongeable par continuité en 0.

   Et $\begin{cases}g(x)=f(x)\ x\in D^*\\ g(0)=2\end{cases}$

   $\dfrac{g(x)-g(0)}{x}=\dfrac{x^3-2+2cosx}{x(1-cosx)}=\dfrac{x-\ 2\times\frac{1-cosx}{x^2}}{\frac{1-cosx}{x}}$. Conclure.

Exercice6

1. Quand x tend vers 0^+ ; $\dfrac{1}{x}\to+\infty$ donc on doit encadrer $sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

$-1 \leq sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1$ et remarquer que pour x voisin de zéro $\frac{x\sqrt{x}}{x-1}$ est strictement négatif donc

$$-1 \leq sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1 \Leftrightarrow \frac{x\sqrt{x}}{x-1} \leq \frac{x\sqrt{x}\, sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x-1} \leq -\frac{x\sqrt{x}}{x-1}.$$

Comme $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{x\sqrt{x}}{x-1} = 0$ alors par comparaison $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{x\sqrt{x}\, sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x-1} = 0$. Ainsi $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0$

2. g est composée de la fonction $x \mapsto \frac{1}{cosx}$ par la fonction f.

$$\lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \frac{1}{cosx} = +\infty$$

Quand x tend vers $+\infty$; $\frac{1}{x} \to 0$ et donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x\sqrt{x}\, sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x-1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}}{x-1} \times \frac{sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$

D'une part $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}}{x-1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}} = 0$

D'autre part : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$ *et* $\lim\limits_{x\to 0} \frac{sinx}{x} = 1$ alors par composition $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = 1$. Ainsi

$$\lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-} g(x) = 0 \times 1 = 0$$

Exercice 7

1. $x^2 + 3x = x(x+3)$ positif sur $]-\infty, -3]$ et sur $[0, +\infty[$ donc $x \mapsto \sqrt{x^2+3x} - 3$ est définie sur $]-\infty, -3]$ et sur $[0,1[$

   $x \mapsto 2x - 3 + \frac{2}{x} cos\left(\frac{\pi}{2} x\right)$ est définie en tout réel non nul en particulier sur $[1, +\infty[$. Ainsi f est définie su

   $]-\infty, -3] \cup [0, +\infty[$.

2. $x \mapsto x^2 + 3x$ est polynôme continue en tout réel et positive sur $]-\infty, -3]$ et sur $[0, +\infty[$ donc $x \mapsto \sqrt{x^2+3x} - 3$

   est continue sur $]-\infty, -3]$ et sur $[0,1[$

   $x \mapsto 2x - 3 + \frac{2}{x} cos\left(\frac{\pi}{2} x\right)$ est continue en tout réel non nul en particulier sur $[1, +\infty[$.

   Continuité de f en 1

   Il est clair que f est continue a droite en 1 et $f(1)$= -1.

   $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} \sqrt{x^2+3x} - 3 = -1 = f(1)$. Donc f est continue à gauche en 1 et par suite elle est continue en 1. f est alors continu sur son ensemble de définition.

3. La restriction de f à $[1,+\infty[$ est continue de plus $f(1)=-1\prec 0$ et $f(3)=3-\frac{2}{3}=\frac{7}{3}\succ 0$ donc f s'annule au moins une fois sur l'intervalle $]1,3[$.

4. $g(x)=f\left(1+sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right)$. g est composée de $u:x\mapsto 1+sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ par la fonction f.

u est continue sur $[0,1]$ et pour $x\in[0,1]$; $0\le\frac{\pi}{2}x\le\frac{\pi}{2}\Rightarrow 0\le sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\le 1\Rightarrow 1\le 1+sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\le 2$ ce qui se traduit par $u([0,1])=[0,2]$ et comme f est continue sur $[0,2]$ alors $g=f\circ u$ est continue sur $[0,1]$.

Exercice8

1. **Continuité de f sur l'ouvert $]-1,+\infty[$:**

La fonction $u:x\mapsto\frac{\pi}{x+1}$ est rationnelle avec un dénominateur ne s'annulant pas sur $]-1,+\infty[$ et la fonction sinus est continue sur $\mathbb{R}$ donc par composée la fonction $sin\circ u$ est continue sur $]-1,+\infty[$.

La fonction $v:x\mapsto\sqrt{x+1}$ est continue en tout réel de $[-1,+\infty[$ et donc par produit la fonction $u\times v$ est continue sur $]-1,+\infty[$.

Ainsi f est continue sur cet intervalle comme somme de deux fonctions continues.

Continuité de f à droite en -1 :

Pour $x\succ -1$; $-1\le sin\left(\frac{\pi}{x+1}\right)\le 1\Leftrightarrow -\sqrt{x+1}\le\sqrt{x+1}\,sin\left(\frac{\pi}{x+1}\right)\le\sqrt{x+1}$

$\Leftrightarrow -1-\sqrt{x+1}\le f(x)\le -1+\sqrt{x+1}$

$\lim\limits_{x\to(-1)^+}-1-\sqrt{x+1}=-1$ et $\lim\limits_{x\to(-1)^+}-1+\sqrt{x+1}=-1$ donc par comparaison $\lim\limits_{x\to(-1)^+}f(x)=-1=f(-1)$ donc f est continue à droite en -1 et par suite elle est continue sur $[-1,+\infty[$.

2. On peut écrire pour $x\succ -1$, $f(x)=-1+\sqrt{x+1}\,\dfrac{sin\left(\frac{\pi}{x+1}\right)}{\frac{\pi}{x+1}}\times\dfrac{\pi}{x+1}$ ou encore que

$$f(x)=-1+\dfrac{sin\left(\frac{\pi}{x+1}\right)}{\frac{\pi}{x+1}}\times\dfrac{\pi}{\sqrt{x+1}}$$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\pi}{x+1}=0$ et $\lim\limits_{x\to 0}\frac{sinx}{x}=1$ donc par composée $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{sin\left(\frac{\pi}{x+1}\right)}{\frac{\pi}{x+1}}=1$ de plus $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\pi}{\sqrt{x+1}}=0$ donc par produit et somme $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-1$.

3. a) Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet au moins une solution a dans $]0,1[$.

f est continue sur $[-1,+\infty[$ donc forcément sur $[0,1]$.

$f(0)=-1+\sqrt{1}\times sin(\pi)=-1\prec 0$

$f(1)=-1+\sqrt{2}\times sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=\sqrt{2}-1\succ 0$

Donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution a dans $]0,1[$.

b) On sait que $f(a)=0 \Leftrightarrow -1+\sqrt{a+1}\, sin\left(\frac{\pi}{a+1}\right)=0 \Leftrightarrow sin\left(\frac{\pi}{a+1}\right)=\frac{1}{\sqrt{a+1}}$.

Or $\forall a \in \,]0,1[$, $sin^2\left(\frac{\pi}{a+1}\right)+cos^2\left(\frac{\pi}{a+1}\right)=1 \Leftrightarrow cos^2\left(\frac{\pi}{a+1}\right)=1-sin^2\left(\frac{\pi}{a+1}\right)$

$\Leftrightarrow cos^2\left(\frac{\pi}{a+1}\right)=1-\frac{1}{(a+1)}=\frac{a}{a+1} \Leftrightarrow cos\left(\frac{\pi}{a+1}\right)=\pm\sqrt{\frac{a}{a+1}}$.

mais remarquons que $0 \prec a \prec 1 \Leftrightarrow 1 \prec a+1 \prec 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \prec \frac{1}{a+1} \prec 1 \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} \prec \frac{\pi}{a+1} \prec \pi$ et donc $cos\left(\frac{\pi}{a+1}\right) \prec 0$ et

par suite $cos\left(\frac{\pi}{a+1}\right)=-\sqrt{\frac{a}{a+1}}$. Finalement $tan\left(\frac{\pi}{a+1}\right)=\frac{sin\left(\frac{\pi}{a+1}\right)}{cos\left(\frac{\pi}{a+1}\right)}=\frac{\frac{1}{\sqrt{a+1}}}{-\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a+1}}}=-\frac{1}{\sqrt{a}}$.