Lycée pilote de Tunis	**Limite – continuité 0**	*Terminales maths & S-Exp*
Mr Ben Regaya. A	**+Eléments de corrections**	www.ben-regaya.net

Exercice1 « limites des fonctions composées »

Plusieurs réponses peuvent être exactes.

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ telle que $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=2$ .Alors, on peut conclure que :

a) $\lim\limits_{x\to -1} f(-x)=2$; b) $\lim\limits_{x\to 0} f(1-x)=-2$; c) $\lim\limits_{x\to 1} f\left(\dfrac{x}{2}\right)=1$; d) $\lim\limits_{x\to +\infty} f\left(1+\dfrac{1}{x}\right)=2$.

Exercice2 « prolongement par continuité »

La fonction f définie par : $f(x)=\dfrac{x^3-2x^2-x+2}{1-x^2}$ est-elle prolongeable par continuité sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3 « limites par comparaison»

On considère la fonction f définie par : $f(x)=\sqrt{x^2-2x\cos x+1}$

1. Montrer que $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\cos x}{x}=0$
2. Déduire que $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}=1$.

Exercice 4 « limites par comparaison»

On considère la fonction f définie sur $[2,+\infty[$ par : $f(x)=\dfrac{3x+\sin x}{x-1}$.

a) Montrer que, pour tout $x\geq 2$, $|f(x)-3|\leq \dfrac{4}{x-1}$.

b) En déduire la limite de f en $+\infty$.

Exercice 5 « limites par comparaison»

Soit f la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $f(x)=\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x}\right)\sin x$.

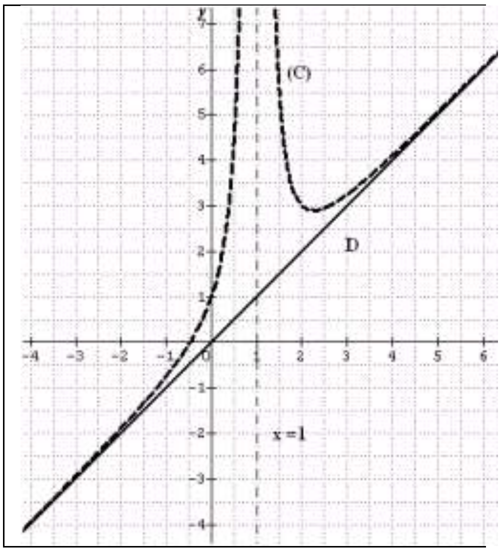
1. Montrer que pour tout réel positif x, $f(x)=\dfrac{2\sin x}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}}$.
2. Montrer que pour tout réel positif x, $-\dfrac{2}{\sqrt{x}}\leq f(x)\leq \dfrac{2}{\sqrt{x}}$. En déduire la limite de f en $+\infty$.

Exercice 6 « limites et continuité de la fonction composées »

On considère les fonctions f et g définies par : $\begin{cases} f(x)=\dfrac{1-\cos\sqrt{|x|}}{|x|}, & x\neq 0 \\ f(0)=\dfrac{1}{2} \end{cases}$ et $\begin{cases} g(x)=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^2, & x\neq 0 \\ g(0)=\dfrac{1}{2} \end{cases}$

1. Montrer que pour tout réel x ; $f(x)=g\left(\dfrac{\sqrt{|x|}}{2}\right)$
2. Montrer que g est continue sur $\mathbb{R}$.
3. Déduire que f est continue sur $\mathbb{R}$.
4. Calculer $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$.

Exercice 7 « fonctions composées – théorème des valeurs intermédiaires »



Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

La figure ci-contre est la représentation graphique (C) d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ et telle que les droites $x = 1$ et D sont des asymptotes à (C).

1. Déterminer

$$\lim_{x\to+\infty} f(-x)\ ,\ \lim_{x\to+\infty} f\left(\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}\right) \text{ et } \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)-2x}{\sqrt{1-x}}.$$

2. Déterminer l'ensemble de définition de $\frac{1}{f}$ et celui de $f\circ f$.

3. Déterminer les limites éventuelles suivantes :

$$\lim_{x\to 1}\left(f\circ f\right)(x) \text{ et } \lim_{x\to 0}\left(f\circ f\right)(x)$$

4. Soit pour x réel non $g(x)=x+\frac{1}{x}$ et $h(x)=f(x)+g(x)$. Donner l'équation de la droite Δ asymptote à la courbe de h au voisinage de -∞.

5. Montrer que l'équation $f(x)=\frac{3}{2}$ admet une solution unique dans $[0,1[$.

6. Soit t la fonction définie sur $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ par : $\begin{cases} t(x)=f(x)\,; & x\prec 0 \\ t(x)=\dfrac{2\sqrt{1+x}-2}{x-x^2}\,; & x\succ 0 \end{cases}$. t est-elle prolongeable par continuité en 0 ? Justifier.

Exercice 8 « limites par comparaison»

1. Soit la fonction f définie par $f(x)=\frac{2}{x^3}\left(3+cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)$.

   a) Donner pour x réel non nul ,un encadrement de $f(x)$.

   b) Déterminer alors $\lim_{x\to 0} f(x)$.

2. On considère la fonction $g : x \mapsto \frac{x\cos x}{x^2+4}$.

   a) Montrer que pour tout réel , $\left| x\,g(x)\right| \prec 1$.

   b) En déduire le comportement de $g(x)$ en +∞ et en –∞.

Exercice1

a) $\lim\limits_{x\to -1}(-x)=1$ et $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=2$ donc par composée $\lim\limits_{x\to -1} f(-x)=2$

b) $\lim\limits_{x\to 0}(1-x)=1$ et $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=2$ donc par composée $\lim\limits_{x\to 0} f(1-x)=-2$

c) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{x}{2}\right)=\frac{1}{2}$ mais on connait pas $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} f(x)$ donc pas de conclusion.

d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)=1$ et $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=2$ donc par composée $\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(1+\frac{1}{x}\right)=2$.

Exercice2

Remarquons que f est définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$ et que pour

x réel distinct de ±1, $f(x)=\dfrac{x^3-x-2x^2+2}{1-x^2}=\dfrac{x\left(x^2-1\right)-2\left(x^2-1\right)}{1-x^2}=\dfrac{(x-2)\left(x^2-1\right)}{1-x^2}=2-x$.

f est rationnelle continue en tout réel distinct de 1 et de -1 de plus f adfmet des limites finies en -1 et 1 qui sont respectivement 3 et 1 donc f est prolongeable par continuité sur $\mathbb{R}$ en la fonction g définie par $\begin{cases} g(x)=f(x),\ x\neq\pm1\\ g(1)=1\\ g(-1)=3\end{cases}$

et g est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice3

1. $-1\le cosx\le 1$ donc $|cosx|\le 1$ et donc $\left|\dfrac{cosx}{x}\right|\le\dfrac{1}{x}$ et comme $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$ alors par comparaison $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{cosx}{x}=0$.

2. Pour $x\succ 0$, $f(x)=x\sqrt{1-2\dfrac{cosx}{x}+\dfrac{1}{x^2}}$ et donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\sqrt{1-2\frac{cosx}{x}+\frac{1}{x^2}}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{1-2\frac{cosx}{x}+\frac{1}{x^2}}=1.$$

Exercice 4

a) $f(x)-3=\dfrac{3x+sinx}{x-1}-3=\dfrac{3+sinx}{x-1}$. Or $-1\le sinx\le 1\Leftrightarrow 2\le 3+sinx\le 4\Rightarrow|3+sinx|\le 4$ et donc

$|f(x)-3|=\dfrac{|3+sinx|}{|x-1|}\le\dfrac{4}{|x-1|}$ mais $x\ge 2$ donc $x-1\ge 1$ et par suite $|f(x)-3|\le\dfrac{4}{x-1}$.

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4}{x-1}=0$ donc par comparaison $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=3$.

Exercice 5

1. Pour x réel positif , $\sqrt{x+2}-\sqrt{x}=\dfrac{2}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}}$ par l'expression conjuguée.

Ainsi $f(x)=\dfrac{2sinx}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}}$.

2. On a pour x réel , $-1 \leq sinx \leq 1 \Leftrightarrow -2 \leq 2sinx \leq 2$ et donc $2|sinx| \leq 2$ .Ainsi

$$|f(x)| = \frac{|2sinx|}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}} \leq \frac{2}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}} \leq \frac{2}{\sqrt{x}}.$$

On vient de prouver que pour tout réel positif x, $|f(x)| \leq \frac{2}{\sqrt{x}}$ et donc $-\frac{2}{\sqrt{x}} \leq f(x) \leq \frac{2}{\sqrt{x}}$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} -\frac{2}{\sqrt{x}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = 0$ donc par comparaison $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

Exercice 6

1. On rappelle que $1-cos2a = 2sin^2 a$ et donc $1-cost = 2sin^2\left(\frac{t}{2}\right)$

Pour $x \neq 0$; $f(x) = \dfrac{1-cos\sqrt{|x|}}{|x|} = \dfrac{2sin^2\left(\dfrac{\sqrt{\left|\sqrt{x}\right|}}{2}\right)}{|x|} = \dfrac{1}{2}\dfrac{sin^2\left(\dfrac{\sqrt{\left|\sqrt{x}\right|}}{2}\right)}{\left(\dfrac{\sqrt{|x|}}{2}\right)^2} = g\left(\dfrac{\sqrt{|x|}}{2}\right)$. Résultat qui reste valable

pour $x = 0$ ($f(0)= g(0)$).

2. $g = v \circ u$ avec $u(x) = \frac{sinx}{x}$ et $v(x) = \frac{1}{2}x^2$.

u est continue en tout réel non nul

v est continue sur $\mathbb{R}$

Donc par composée g est continu en tout réel non nul

Contnuité en 0 :

$\lim\limits_{x\to0} u(x) = 1$ et $\lim\limits_{x\to1} v(x) = \frac{1}{2}$ donc par composée $\lim\limits_{x\to0} g(x) = \frac{1}{2} = g(0)$ donc g est continue en 0 et par suite sur $\mathbb{R}$.

3. $x \mapsto \frac{\sqrt{|x|}}{2}$ est continue et tout réel et g est continue sur $\mathbb{R}$ donc f est contnue sur $\mathbb{R}$ comme composée.

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sqrt{|x|}}{2} = +\infty$ et $-\frac{1}{x} \leq \frac{sinx}{x} \leq \frac{1}{x}$ donc par comparaison $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{sinx}{x} = 0$ $\left(\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} -\frac{1}{x} = 0\right)$

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

Exercice 7

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} -x = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ donc par composée $\lim\limits_{x\to+\infty} f(-x) = -\infty$

$x \succ 0,\ \dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x} = \dfrac{x\times\sqrt{\dfrac{1}{x^2}+1}}{x} = \sqrt{\dfrac{1}{x^2}+1}$ et on a $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\dfrac{1}{x^2}+1} = 1$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x} = 1$ et comme

$\lim\limits_{x\to 1} f(x) = +\infty$ alors par composée $\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x}\right) = +\infty$

La droite D à pour équation $y = x$ et c'est une asymptote oblique à la courbe (C) au voisinage de -∞ donc

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)-x\right) = 0$ dans ce cas $\dfrac{f(x)-2x}{\sqrt{1-x}} = \dfrac{f(x)-x}{\sqrt{1-x}} - \dfrac{x}{\sqrt{1-x}} = \dfrac{f(x)-x}{\sqrt{1-x}} - \dfrac{x}{|x|\sqrt{\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x}}}$

$= \dfrac{f(x)-x}{\sqrt{1-x}} + \dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x}}}$, x étant strictement négatif.

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)-x\right) = 0,\ \lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{1-x} = +\infty$ donc par quotient $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)-x}{\sqrt{1-x}} = 0$ aussi

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x} = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x}}} = +\infty$ donc par somme $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)-2x}{\sqrt{1-x}} = +\infty$.

2. Posons $\varphi = \dfrac{1}{f}$. La fonction φ peut être vue comme composée de la fonction $u : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ et f.

   Or f est définie sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ et u est définie sur $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ et comme f s'annule pour $x = -\dfrac{1}{2}$ alors $\varphi = u\circ f$ est

   définie sur $\mathbb{R}\backslash\left\{-\dfrac{1}{2},1\right\}$.

   Pour déterminer l'ensemble de définition de $f\circ f$ il faut résoudre l'équation $f(x) = 1$.

   Or graphiquement $f(x) = 1 \Leftrightarrow x = 0$

   Ainsi l'ensemble de définition de $f\circ f$ est $\mathbb{R}\backslash\{0,1\}$.

3. $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ donc par composée $\lim\limits_{x\to 1}\left(f\circ f\right)(x) = +\infty$.

   $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0) = 1$ (f est continue en 0) et $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = +\infty$ donc par composée $\lim\limits_{x\to 0}\left(f\circ f\right)(x) = +\infty$.

4. Remarquons que $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(g(x)-x\right) = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x} = 0$ donc la droite $D : y = x$ est aussi asymptote à la courbe de g

   au voisinage de -∞ et que $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = -\infty$.

   $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(h(x)-2x\right) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)-x\right)+\left(g(x)-x\right) = 0+0 = 0$ donc la droite d'équation $y = 2x$ est

   asymptote oblique à la courbe de h au voisinage de - ∞.

5. f étant continue sur $[0,1[$ et elle est strictement croissante sur cet intervalle et $f\left([0,1[\right) = [1,+\infty[$ et comme

   $\dfrac{3}{2} \in f\left([0,1[\right)$ alors l'équation $f(x) = \dfrac{3}{2}$ admet une solution unique dans $[0,1[$.

6. remarquons que t n'est pas définie en 0.

Calculons la limite de t quand x tend vers 0.

Pour x réel strictement positif, $\dfrac{2\sqrt{1+x}-2}{x-x^2}=2\dfrac{x}{x(1-x)\left(\sqrt{1+x}+1\right)}=\dfrac{2}{(1-x)\left(\sqrt{1+x}+1\right)}$ et donc

$\lim\limits_{x\to0^+} t(x)=1$ on a aussi $\lim\limits_{x\to0^-} t(x)=\lim\limits_{x\to0^-} f(x)=1$ ainsi la fonction t admet une limite en o égale à 1 donc elle est plongeable par continuité en 0.

Exercice 8

pour x réel non nul , $-1\le cos\left(\dfrac{1}{x}\right)\le1 \Leftrightarrow 2\le 3+cos\left(\dfrac{1}{x}\right)\le 4$.

Donc pour $x\succ0$, on obtient $\dfrac{4}{x^3}\le f(x)\le\dfrac{8}{x^3}$ et donc $\dfrac{4}{x^3}\le f(x)$ et comme $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{4}{x^3}=+\infty$ alors par comparaison $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=+\infty$ et si $x\prec0$ alors on obtient : $\dfrac{8}{x^3}\le f(x)\le\dfrac{4}{x^3}$ et comme $\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{4}{x^3}=-\infty$ alors par comparaison $\lim\limits_{x\to0^-} f(x)=-\infty$.

$$|xg(x)|=\left|\frac{x^2\cos x}{x^2+4}\right|\le\left|\frac{x^2}{x^2+4}\right|=\frac{x^2}{x^2+4}\prec1.$$

Pour x non nul l'inégalité $|\,x\,g(x)\,|\prec1$ devient $|g(x)|\prec\dfrac{1}{|x|}$ et comme $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{1}{|x|}=0$ alors par comparaison $\lim\limits_{x\to\pm\infty} g(x)=0$.