Mr : Chahed **Série (Limites-Continuité)** **4eme math**

Exercice1

Cocher la réponse exacte

1) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 2}$ .la courbe de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ admet pour asymptote la droite d'équation

a) $y = x$ b) $y = x - 1$ c) $y = x + 1$

2) Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{x+3}{x+2+\sqrt{x+4}}$ alors

a) $D_f = \mathbb{R}$ b) f est prolongeable par continuité en -3 c) C_f admet une asymptote verticale

3) La courbe d'une fonction positive f admet une branche parabolique de direction $(O, \vec{j})$ au voisinage de $+\infty$

Alors $\lim_{x\to+\infty} f(x) - x$ est

a) 0 b) $-\infty$ c) $+\infty$

Exercice2 Etudier les limites suivantes

1) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{x^4+1}-x}{x^6-1}\right)$ 2) $\lim_{x\to-\infty}\left(x\sqrt{\frac{x+1}{x^3-1}}\right)$ 3) $\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x}{2-\sin x}\right)$ 4) $\lim_{x\to0}\left(x^2\sin\left(\frac{\pi}{x}\right)\right)$

5) $\lim_{x\to0}\left(\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{1+kx}}{x}\right)-\frac{n}{x}\right)$ 6) $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x}\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)$ 7) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{x^2-2x+5}-2}{x-\cos x}\right)$

Exercice3

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2-2x} + x, & x \le 0 \\ \frac{\sqrt{x}\ \sin\left(\frac{\pi}{x}\right)}{x-1}, & x \in]0,+\infty[\setminus\{1\} \end{cases}$

1) a) Montrer que pour tout réel $x \in]0,1[$, $\frac{\sqrt{x}}{x-1} \le f(x) \le -\frac{\sqrt{x}}{x-1}$

b) Monter alors que f est continue en 0

c) Déterminer les limites de f en $+\infty$, $-\infty$ et $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x}\, f(x)\right)$

2) On pose $u(x) = \frac{\pi(x-1)}{x}$, $v(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ et $w(x) = \frac{\pi}{\sqrt{x}}$ pour $x \in]0,+\infty[\setminus\{1\}$

a) Vérifier que pour tout $x \in]0,+\infty[\setminus\{1\}$ $f(x) = w(x).(v o u)(x)$

b) En déduire que f admet un prolongement par continuité g en 1

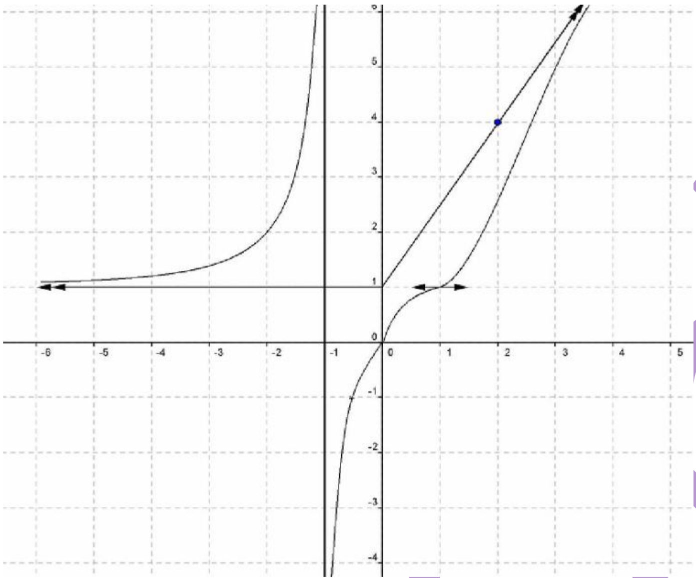
c) Montrer que l'équation $\sin\left(\frac{\pi}{x}\right) = 3\left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ admet dans l'intervalle $]1,2[$ une solution α

Exercice 4

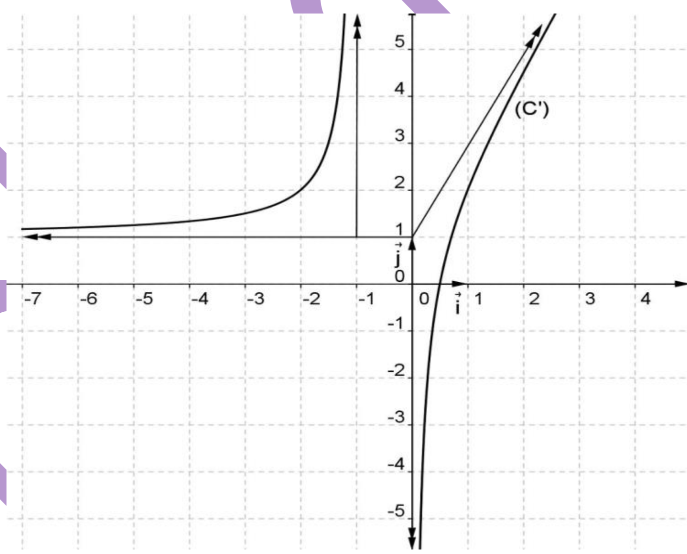
Soit f la fonction définie sur $[-1,+\infty[$ par $f(x)=\begin{cases}-1+\sqrt{x+1}\,\sin\left(\frac{\pi}{x+1}\right), & x>-1\\ f(-1)=-1\end{cases}$ 1) Montrer que f est continue sur $[-1,+\infty[$ et calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x))$ 2) Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet au moins une solution α sur $]0,1[$ et que $\tan\left(\frac{\pi}{\alpha+1}\right)=\frac{-1}{\sqrt{\alpha}}$

Exercice 5

Dans les figures ci–dessous on a représenté les courbes représentatives (C) et (C') respectivement de Deux fonctions f et g.



*****



1) Déterminer l'ensemble de définition de gof 2) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x))$, $\lim\limits_{x\to+\infty}(g(x))$, $\lim\limits_{x\to+\infty}(g(x)-2x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{gof(x)}{x}\right)$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{fog(x)}{x}\right)$, $\lim\limits_{x\to-\infty}(fof(x))$, $\lim\limits_{x\to0^+}(gog(x))$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x).\sin\left(\frac{1}{f(x)}\right)\right)$

Exercice 6

La courbe ci-dessous est la représentation graphique d'une fonction f définie et continue sur $\mathbb{R}$

C_f ademet une asymptote La droite d'équation $y=x$ et une branche parabolique de direction $(o,\vec{j})$ Au voisinage de $-\infty$

1) Par une lecture graphique déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\right)$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\right)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{f(x)-x}\right)$

2)Soit g la fonction définie par $g(x)=\frac{1}{\sqrt{x+1}}$ et $h=gof$

a) Déterminer l'ensemble de définition de h

b) Déterminer $\lim\limits_{x\to0^-}(h(x))$ et $\lim\limits_{x\to-1^+}(fog(x)-g(x))$

3) a)Montrer que $g(]-1,+\infty[) =]0,+\infty[$

b) Justifier la continuité de h sur $]1,+\infty[$

c) Déterminer $h(]1,+\infty[)$

d) En déduire que l'équation $h(x) = \frac{1}{n}$ $n \in \mathbb{N}^*$ admet une unique solution solution α_n sur $]1,+\infty[$