Exercice1 :

Calculer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to+\infty} \sin\dfrac{\pi(x+1)}{2x}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x+\sin x}{x}$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\cos x}{1-x}$,

$\lim\limits_{x\to+\infty} (\sqrt{x}-\sin x)$ $\lim\limits_{x\to+\infty} \cos(\frac{1}{x})$;

$\lim\limits_{x\to+\infty} (x^2-2\sin x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1+2\sin x}{1+\sqrt{x}}$

Exercice :2

$b\in$ IR et f une fonction définie et dérivable sur $[b, +\infty[$, telle que $\forall\ x \geq b$, on a : $f'(x) \geq 2$.

1)Mque $\forall\ x \geq b$, $f(x) \geq 2(x-b) + f(b)$

2)En déduire la limite de f en $+\infty$.

3)Mque l'on peut déterminer des réels m et M que l'on précisera, tels que

$\forall\ x\in$IR : $m \leq \dfrac{1}{2-\sin x} \leq M$

En, déduire $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x}{2-\sin x}$

Exercice 3:

Soit $f(x)=\dfrac{3x+\sin x}{x-1}$ sur $[2, +\infty[$

a)Mque $|f(x)-3| \leq \dfrac{4}{x-1}$

b)En déduire la limite de f en $+\infty$

Exercice 4:

Vrai ou Faux

La fonction f est donnée par son tableau de variation et tel que f(0)=2 et f(2)=0

x	$-\infty$		1		$+\infty$
f(x)	0	↗	3	↘	$-\infty$

g est la fonction définie par : $g(x)=\dfrac{\sqrt{1+x^2}+1}{x}$ alors :

a)gof est continue sur IR- ;

b)gof est continue sur IR ;

c) fog est continue sur IR*

d)$\lim_{-\infty} gof(x)$ = $-\infty$

e) $\lim_{+\infty} gof(x)$ = -1 ;

f) gof est prolongeable par continuité en 2

Exercice 5 (5 points)

Soit la fonction f définie sur IR par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1+\cos(\pi x)}{(1+x)\,\pi} & \text{si } x > -1 \\ \sqrt{x^2+x} & \text{si } x \leq -1 \end{cases}$$

1)Calculer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} (f(x)+x)$.

2) Montrer que si $x \in\ ]-1, +\infty[$, on a

$0 \leq f(x) \leq \dfrac{2}{(x+1)\,\pi}$.

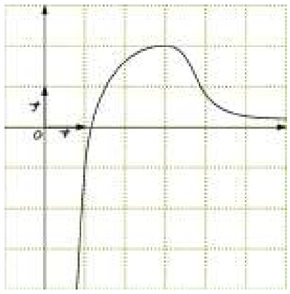
3) déduire : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f\circ f(x)$.

4) Etudier la continuité de f en -1.

5) Montrer que l'équation f(x) = 2x admet au moins une solution $\alpha \in\ ]0, \frac{1}{2}[$.

Exercice 6 (3 points)

Soit f une fonction continue sur $]0, +\infty[$ dont la courbe est la suivante :



Calculer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(\dfrac{3x+5}{x-1}\right)$;

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(\sqrt{1-x})$;

$\lim\limits_{x\to-\infty} x\, f\left(\dfrac{1+x}{x}\right)$

Exercice 7:

1) Montrer que l'équation (E) $x^7 - x^2 + 1 = 0$, a une seule solution sur I = [- 2, 0]

2) M que : $f(x) = x^3 + 2x + 1$ s'annule dans IR.

3)Mque l'équation 2cosx=x-1 admet au moins une solution dans IR.

4) Mque l'équation $\sqrt{x} = \dfrac{5}{x-2}$ admet une unique solution dans IR.

Exercice 8; VRAI – FAUX

Soit f une fonction d'ensemble de définition [a, b] où a et b sont deux réels tels que f(a)=2 et f(b)=-1

1)L'équation f(x)=1 admet au moins une solution dans [a,b]

2)Si f est continue sur I, alors l'équation f(x)=1 admet au moins une solution dans [a,b]

3)Si f est strictement décroissante sur I, alors l'équation f(x)=1 admet au plus une solution dans [a, b]

Exercice 9.

La courbe ci-contre est la représentation graphique d'une fonction f définie et continue sur IR C_f admet en $-\infty$ une asymptote d'équation y = 0, C_f admet en $+\infty$ une branche infinie de direction la droite y = x

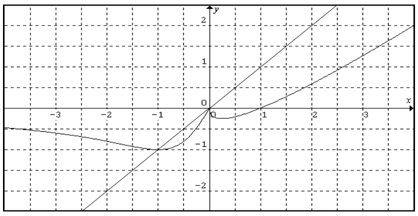
1°) Donner chacune des limites suivantes : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$,

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-x$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$.

2°) Déterminer chacune des limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(\frac{x+1}{x}\right)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x^2)$ et $\lim\limits_{x\to 1^+} \frac{\sin[f(x)]}{\sqrt{f(x)}}$

3°) Soit g la fonction définie par $g(x) = \frac{1}{f(x)}$



a) Déterminer l'ensemble de définition de g.

b) Montrer que C_g admet au moins trois asymptotes.

c) Déterminer l'image par g de l'intervalle $[-1, 0[$

Exercice 10:

$\forall n\geq 2$, soit $f_n(x)=x^n - nx+1$; $x\in[0, 1]$

1)Etudier la position relative de C_n et C_{n+1}

2)Dque l'équation $f_n(x)=0$ admet une unique solution α_n dans $[0, 1]$

Quel est la monotonie de la suite (α_n)

Exercice 11:

$n \in IN$, soit $f_n(x) = x^3 + 3(n+1)x + 1$, $x\in IR$

1)M qu'il existe unique réel $u_n \in]-1, 0[$ tel que $f_n(u_n) = 0$.

2)Mque $\forall x \in]-1, 0[$ et $\forall n\in IN$, $f_{n+1}(x) < f_n(x)$

3)Déduire que la suite u est convergente vers une limite que l'on calculera

Exercice 12:

Soit $f_n(x) = x^{n+1}-2x^n +1$,

où n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

1)a) Dresser le tableau de variations de f_n sur $[1, +\infty[$

b) En déduire le signe de $f_n(\frac{2n}{n+1})$

2)a) M que l'équation $f_n(x) = 0$ admet dans $]\frac{2n}{n+1}, +\infty[$ une seule solution qu'on notera U_n

b) Vérifier que $\frac{2n}{n+1} < U_n < 2$, $n \geq 2$

c) En déduire la limite de la suite (U_n)

3)a) Montrer que pour tout $x \in [1,2]$, on a : $f_{n+1}(x) \leq f_n(x)$

b) En déduire que la suite (U_n) est croissante

Exercice 13:

Soit $n \geq 1$. on considère la fonction f_n définie par $f_n(x)= x^n+x^{n-1} + \ldots +x-1$

1)Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution a_n dans $[0, 1]$

2)a) Vérifier que $f_{n+1}(a_n) \geq 0$.

b) Etudier alors la monotonie de la suite (a_n).

c) En déduire que la suite (a_n) est convergente.

3)a)Montrer que pour tout n, $a_n - \frac{1}{2} = \frac{a_n^{n+1}}{2}$

b)En déduire la limite de la suite (a_n) (on pourra vérifier que $a_n \leq 0{,}7$ pour $n\geq 2$)

Exercice 14:

Soit $f(x)= x + 1 - \frac{1}{1+x^3}$

1) Dresser le tableau de variation de f

b) Soit $n \in IN^*$, montrer que l'équation $f(x)=n$ admet une solution x_n dans l'intervalle$]n-1, n[$

c)Mque la suite (x_n) est strictement croissante.

d) En déduire que (x_n) est non majorée.

2) Soit $g(x)=f(\frac{\sin x}{x})$; $x \in]0,\pi]$ et $g(0)=\frac{3}{2}$

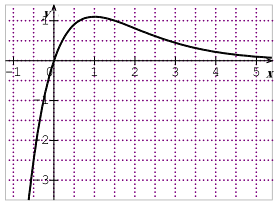
Montrer que g est continue sur $[0,\pi]$

Exercice15:

(QCM)

Pour chaque question choisir la seule réponse correcte

1)Soit f une fonction continue sur $]-1 , +\infty[$ et dont la courbe est donnée ci- dessus.

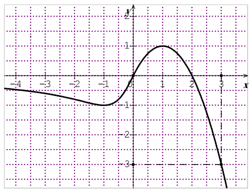


$\lim\limits_{x\to-\infty} f\left(\sqrt{1-x}\right) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(\frac{2-x}{x}\right) = -1$

$\lim\limits_{x\to+\infty} x.f\left(\frac{1-x}{2x}\right) = -\infty$

2)La courbe ci-contre Est la représentation graphique d'une fonction f définie et continue sur IR. Cf admet au voisinage de:



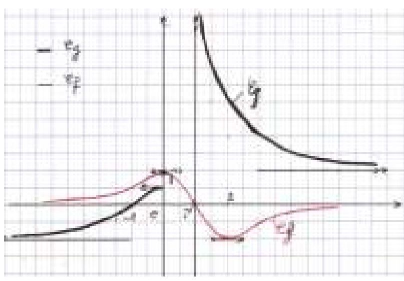
- $-\infty$ une asymptote d'équation $y = 0$
- $+\infty$ une branche infinie parabolique de direction la droite $x = 0$

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{xf(x)}{1-x^2} = 0$. b) $\lim\limits_{x\to 0^+} xf\left(\frac{1}{x}\right) = -\infty$

c) $fof(IR) = IR$

Exercice 16:

On a tracé ci-contre, dans le plan muni d'un repère orthonormé,



les courbes C_f et C_g représentatives de deux fonctions f et g.

1) Déterminer

a) L'image de]-∞; 1[par f.

b) Le domaine de définition de g o f.

2) Résoudre graphiquement gof(x) = 0.

3) Calculer : **a)** $\lim\limits_{x\to 1^+} gof\ (x)$, **b)** $\lim\limits_{x\to +\infty} gof\ (x)$.

4) Dresser le tableau de variation de g o f.

5) Soit l'équation (E) : g o f(x) = $\frac{1}{n}$, où n ≥ 3

a) Montrer que l'équation (E) admet une solution unique $a_n \in]1,2[$ et une solution unique $b_n > 2$.

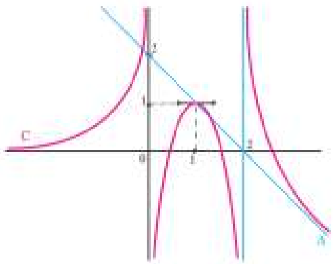
b) Montrer que les suites (a_n) et (b_n) sont convergentes.

c) Montrer alors que (a_n) et (b_n) sont adjacentes.

Exercice 17: (5points)

La courbe ci-dessous est la représentation graphique d'une fonction f définie sur **R** \ {0,2} et tels que $f(-\frac{1}{2}) = 1$

La droite Δ et les droites d'équations respectives x = 0 , x = 2 et y = 0 sont des asymptotes à la courbe C



1) Déterminer graphiquement.

a) $\lim_{x\to+\infty} f(\frac{2}{x})$, b) $\lim_{x\to+\infty}(f(x)+x-1)$,

c) $\lim_{n\to+\infty} f(\frac{3^n+1}{4^n+5})$

2) a) Montrer que f o f est continue sur $]-\infty, -\frac{1}{2}]$.

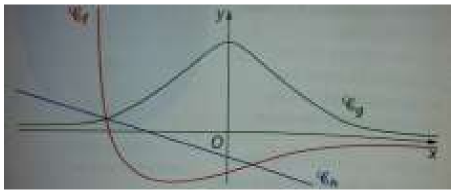
b) Etudier les variations de f o f sur $]-\infty, -\frac{1}{2}]$

c) Déduire que l'équation f o f(x) = 0 admet une seule solution dans $]-\infty, -\frac{1}{2}[$

Exercice 18 :(5 points)

Dans le graphique ci-dessous on a tracé les courbes Cf et Cg représentatives respectivement les fonctions f et g.

Cf admet



- une branche infinie de direction (oy) au voisinage de −∞,

- l'axe (ox) asymptote au voisinage de +∞

Cg admet

- l'axe (ox) une asymptote au voisinage de ±∞

1) Calculer les limites suivantes : $\lim_{x\to-\infty}(gof)$; $\lim_{x\to+\infty}(goh)$; $\lim_{x\to-\infty}\frac{xf(x)}{x^2+1}$; $\lim_{x\to+\infty} f(2^n+\sin(n))$

2) Soit u et v les suites définies sur IN par $u_n = f(n)$ et $v_n = g(n)$ Montrer que les suites u et v sont adjacentes

3) a) Montrer que f o g est continue sur IR-

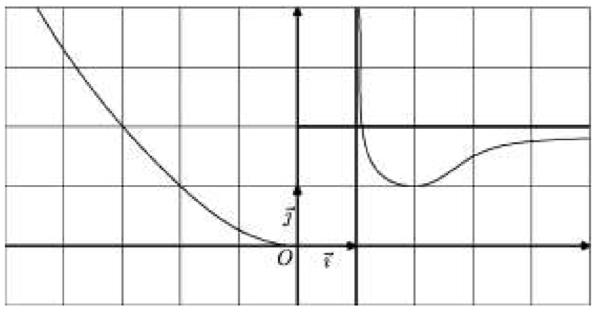
b) Montrer que l'équation f o g(x) = x admet au moins une solution a dans IR-.

Exercice 19 :

Soient g : [0,1] → [0,1] une application continue et strictement décroissante.

f : la fonction dont la représentation graphique est donnée ci-dessous.

I/ 1) Déterminer le domaine de définition de la fonction g o f.



2) Dresser le tableau de variations de g o f sur [-2, 0].

3) Calculer les limites éventuelles suivantes :

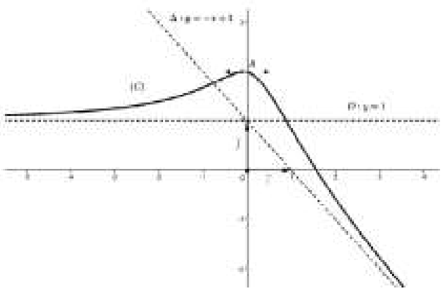
$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f\ (x) - \frac{2x}{x+1}\right)$,

$\lim_{x\to 0} f(\frac{\sin x+\tan 2x}{3x})$; $\lim\limits_{x\to -2^+} gof(x)$

Exercice 20 (4,5 points)

A)Répondre par vrai ou faux. Aucune justification n'est demandée.

Soit f une fonction définie sur [-1, 5].
Si f est continue sur]- 1,5[et si f(-1).f(5)< 0 alors l'équation f(x) = 0 admet au moins une solution dans l'intervalle]- 1, 5[.



B) On a représenté ci-contre la courbe d'une fonction f définie et continue sur IR.

- La droite D : y = 1 est une asymptote à (C) au voisinage de - ∞.
- La droite Δ : y = -x + 1 est une asymptote à (C) au voisinage de + ∞.
- Pour tout réel x < 1, f(x) > 1.
- $f(2) = -\frac{1}{2}$

En utilisant le graphique, répondre aux questions suivantes.

1°) a) Déterminer les limites suivantes $\lim_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x)+x$

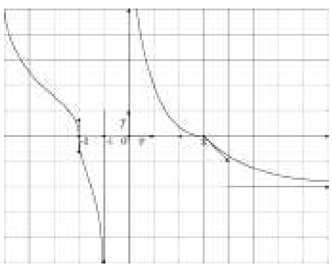
b) Calculer $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{f(x)-1}$ et $\lim_{x\to0^+} \left(\sqrt{x}\right) f\left(\frac{2}{\sqrt{x}}\right)$.

c) Calculer $\lim_{x\to0} f\left(\frac{x-1}{x^2}\right)$ et $\lim_{x\to+\infty} fof(x)$

2°) Déterminer : $f\left(\left]-2,+\infty\right[\right)$ et $fof\left(\left]-\infty,+\infty\right[\right)$

Exercice 21:(4 points)

f est la fonction dont la représentation graphique est donnée ci- contre. La courbe C_f passe par le point A(1,2) et admet :



- Une branche parabolique de direction $(o,\vec{j})$ au voisinage de (-∞).
- Deux asymptotes verticales d'équations ; x = 0 et x = -1.
- Une asymptote horizontale d'équation ; y = -2 au voisinage de (+∞).

g est la fonction dérivable sur son domaine et donnée par son tableau de variations ci-dessous.

x	$-\infty$		-1		0		1		2		$+\infty$
$g(x)$	$-\infty$	↗	0	↗	1	//////	$+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$

1) a) Vérifier que f o g est continue sur]1, +∞[.
b) Etudier les variations de f o g sur]1, +∞[.
c) Déduire que l'équation f o g (x) = -x admet une seule solution a ∈]1, 2[.

2) Déterminer les limites suivantes :

$\lim_{x\to-\infty} (f(x)+x-1)$; $\lim_{x\to-\infty} xf(\frac{3x+1}{x})$; $\lim_{x\to-2^+} \frac{f(x)}{x^2-4}$; $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=2}^{n} g(k)$; $\lim_{x\to0} \frac{g(x+2cosx)-1}{x}$.

3) On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par:

$u_n = 1 + f(3+\frac{1}{n})$ et $v_n = g(2-\frac{1}{n})$; $n > 1$.

Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

Exercice 22 (7 points)

On a représenté ci-dessous la courbe C d'une fonction f dérivable sur [0, +∞[et la courbe Γ de sa fonction dérivée f '.

- La droite y = 1 est une asymptote à C en +∞.
- La droite y = 0 est une asymptote à Γ en +∞.
- $f(2) = \frac{9}{5}$, $f\left(\frac{9}{5}\right) = \frac{98}{53}$ et $f'(2) = -\frac{6}{25}$

Utiliser le graphique ci-dessus pour répondre aux questions suivantes.

1°) Soit g la fonction définie sur]1, +∞[par : $g(x) = f\left(\frac{1}{x-1}\right)$

a) Calculer $\lim_{x\to1^+} g(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} g(x)$.

b) Dresser le tableau de variation de g.

2°) Soit h la fonction définie par : h(x) = fof(x)

a) Déterminer f([1 , 2]) puis h([1 , 2])

b) Montrer que h est dérivable sur]0, +∞[et que pour tout x∈[1 ;2], $0 \le h'(x) \le \frac{1}{4}$.

c) Montrer que l'équation h(x) = x admet dans [1, 2] une seule solution α.

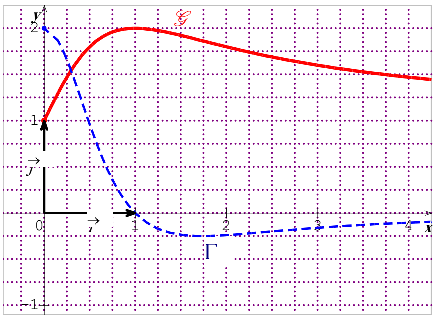
3°) Soit (u_n) la suite réelle définie par : $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = h(u_n)$

a) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $1 \le u_n \le 2$.

b) Montrer que pour tout entier naturel n,

$$|u_{n+1} - \alpha| \le \frac{1}{4}|u_n - \alpha|.$$

c) En déduire que la suite (u_n) converge vers α.



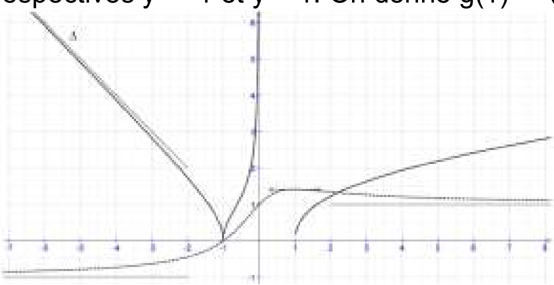
Exercice 23 :

Dans le graphique ci-dessous on a représenté dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O,\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ})$ en gras la courbe C d'une fonction f continue sur $]-\infty,0[\,\cup[1,+\infty[$

En pointillé on a représenté la courbe C ' d'une fonction g continue sur $\mathbb{R}$.

On sait que la droite D est une asymptote à C au voisinage de $-\infty$ et que C admet une branche parabolique de direction celle de (OI) au voisinage de $+\infty$. On sait aussi que (OJ) est une asymptote à C

C' admet deux asymptotes les droites d'équations respectives y = -1 et y = 1. On donne $g(1) = \sqrt{2}$.



1°) Par lecture graphique

a) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$, $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)$

b) Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)$

c) Dresser le tableau de variation de g.

d) Déterminer $f\left(\left[-1,0\right[\right)$ et g(IR).

2°) Soit h la fonction définie par h(x) = fog(x). On note Γ la courbe de h.

a) Déterminer l'ensemble de définition de h.

b) Etudier les branches infinies de Γ.

c) Résoudre l'équation h(x) = 0.

3°) Soit k la fonction définie par : k(x) = g o f(x).

a) Déterminer l'ensemble de définition de h.

b) Déterminer $k(]-\infty, 0[)$

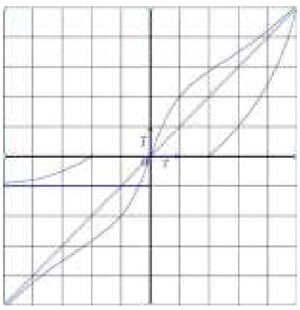
Exercice 24:(6 points)

On a tracé ci-dessous, dans le plan muni d'un repère orthonormé ($O,\vec{i},\vec{j}$) , les courbes C_f et C_g représentatives de deux fonctions f et g telles que :

- f est continue sur IR et g est continue sur $]-\infty , -2] \cup [2, +\infty [$.
- Cf admet une asymptote oblique la droite d : y = x au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$. .
- Cg admet une branche infinie de direction (O, $\vec{j}$) au voisinage de $+\infty$.
- Cg admet une asymptote d'équation y = -1 au voisinage de $-\infty$. .
- Cf passe par les points (1, 2) ; (-1, -2) ; $(\frac{3}{2} ; \frac{5}{2})$.
- Cg passe par les points (2, 0) et (-2, 0).

1) Déterminer le domaine de définition de g o f et de f o g.

2) Déterminer les limites suivantes :



$\lim\limits_{x\to-\infty} gof\ (x)$,

$\lim\limits_{x\to+\infty} gof\ (x)$.

$\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)+x-1)$

; $\lim\limits_{x\to1} f\left(\frac{\sqrt{2x+2}+x-3}{x-1}\right)$;

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{gof(x)}{x}$

; $\lim\limits_{x\to0^-} g\left(\frac{2-\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x}\right)$

.

3) a) Etudier les variations de g o f sur $[1, +\infty[$.

b) Déduire que l'équation g o f(x) = 1 admet une seule solution a dans $]2, +\infty[$.

c) Placer a sur l'axe des abscisse.

4) a) Construire sur le graphique le point de la courbe g o f d'abscisse 2.

b) Tracer une allure de la courbe de g o f dans le même graphique sur $[1 ; +\infty[$.