Lycée Pilote Bizerte : Mme Lamia Khemiri Lycée Pilote Monastir : F . Zemni M . Hassine – H . Yakoubi – M . Krir Lycée Hédi Khéfacha : M . Mansour – I . Aguir Lycée Rue Fattouma Bourguiba : K . Zrafi Lycée Khénis : J . Mbarki	*Devoir de synthèse n°2* *4 Maths* **MATHEMATIQUES** **Durée : 4 h** **Le 27/05/2021**

Exercice 1 : (4 points)

Pour préparer l'examen du permis de conduire, on distingue deux types de formation :
La formation avec conduite accompagnée et la formation traditionnelle.
On considère un groupe de 300 personnes venant de réussir l'examen du permis de conduire.
Dans ce groupe :

- 75 personnes ont suivi une formation avec conduite accompagnée ; parmi elles, 50 ont réussi l'examen à leur première présentation et les autres ont réussi à leur deuxième présentation.
- 225 personnes se sont présentées à l'examen suit à une formation traditionnelle ; parmi elles, 100 ont réussi l'examen à leur première présentation, 75 à la deuxième et 50 à la troisième présentation.

  On interroge au hasard une personne du groupe considéré.
  On considère les évènements suivants :
  A : « la personne a suivi une formation avec conduite accompagnée ».
  R_1 : « la personne a réussi l'examen à la première présentation ».
  R_2 : « la personne a réussi l'examen à la deuxième présentation ».
  R_3 : « la personne a réussi l'examen à la troisième présentation ».

1) Modéliser la situation par un arbre pondéré.

Dans les questions suivantes, les probabilités demandées seront données sous forme d'une forme d'une fraction irréductible.

2) a) Calculer la probabilité que la personne interrogée ait suivi une formation avec conduite accompagnée et réussit l'examen à sa deuxième présentation.

   b) Montrer que la probabilité que la personne interrogée ait réussi l'examen à sa deuxième présentation est égale à $\frac{1}{3}$.

   c) La personne interrogée a réussi l'examen à sa deuxième présentation. Quelle est la probabilité qu'elle ait suivi une formation avec conduite accompagnée ?

3) On note X la variable aléatoire qui, à toute personne choisie au hasard dans le groupe, associe le nombre de fois où elle s'est présentée à l'examen jusqu'à sa réussite.

   a) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

   b) Calculer l'espérance mathématique de cette variable.

4) On choisit, successivement de façon indépendante, n personnes parmi les 300 du groupe étudié, où $n \in \mathbb{N}^*$.

   a) Calculer la probabilité p_n de l'évènement
   F : « au moins une personne à réussi l'examen à la troisième tentative ».

   b) Déterminer le plus petit entier naturel n tel que $p_n \geq 0.99$.

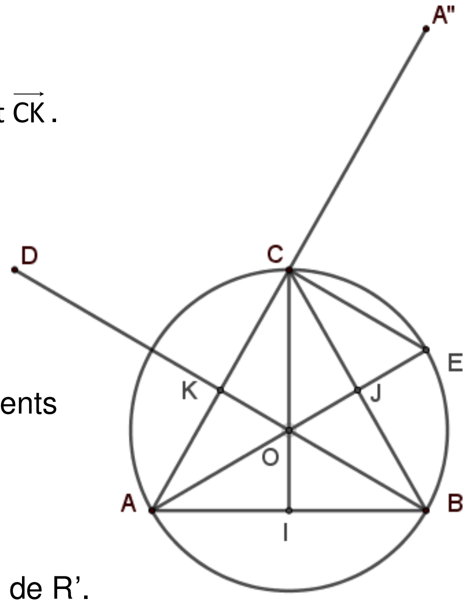
Exercice 2 : (5 points)

Le plan P est orienté dans le sens direct. Soit ABC un triangle équilatéral tel que : $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$.

On désigne par I, J et K les milieux respectifs des segments [AB], [BC] et [AC] et D = $S_{(AC)}(B)$.

On désigne par O le centre du cercle (Γ) circonscrit au triangle ABC.

Soient $r_1 = R_{(A,\frac{\pi}{3})}$, $r_2 = R_{(B,\frac{\pi}{3})}$ et $r_3 = R_{(C,\frac{\pi}{3})}$.



t_1 et t_2 sont les translations de vecteurs respectifs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CK}$.

I) 1) On pose R = r_3 o t_1 o r_2.

Déterminer R(B) puis caractériser R.

2) Soit E le point diamétralement opposé à A et A" = $S_{(EC)}(A)$ et g = $S_{(EB)}\circ S_{(EC)}\circ S_{(AC)}\circ S_{(AB)}$.

a) Montrer que les points B, E et A'' sont alignés.

b) Déterminer g(A), en déduire la nature et les éléments caractéristiques de g.

3) On pose R' = r_1 o t_2 .

a) Déterminer R'(K).

b) Déduire la nature et les éléments caractéristiques de R'.

4) Soit f l'isométrie du plan qui envoie A, B et C respectivement en C, A et D.

a) Vérifier que CAD est un triangle équilatéral indirect.

b) Montrer que f est un antidéplacement.

c) Montrer que f est une symétrie glissante dont on précisera les éléments caractéristiques.

II) Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(I,\vec{u},\vec{v})$ avec $\vec{u}=\overrightarrow{IB}$ (On prendra IB = 1).

On considère l'application S du plan dans lui-même qui à tout point M(z) associe le point M'(z') tel que $z'=-e^{i\frac{\pi}{3}}\bar{z}-e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

1) Soit M" le symétrique de M par rapport à (CI). Déterminer l'affixe z'' de M'' à l'aide de l'affixe de M.

2) a) Déterminer l'écriture complexe de S o $S_{(CI)}$.

b) En déduire que S o $S_{(CI)}$ = r_1.

3) Pour tout entier naturel n, on définit les points B_n par :

* B_0 = B
* Pour tout n ∈ IN, $B_{n+1} = r_1(B_n)$.

a) Vérifier que $(\underbrace{r_1\circ r_1\circ\ldots\circ r_1}_{n\text{ fois}})(B)=B_n$

b) Montrer que si A est le milieu de $[BB_n]$ alors $n\equiv 3 \pmod 6$.

c) Déduire le plus petit entier n > 2021 tel que A soit le milieu de $[BB_n]$

Exercice 3 : (4 points)

Dans cet exercice, on se propose de déterminer s'ils existent les couples d'entiers naturels (x,y) qui vérifient l'équation (E) : $y^2 = x^3 - 5$.

Soit (x , y) une solution de (E).

1) a) Soit a un entier naturel, déterminer les restes modulo 4 de a^3.

b) En déduire que y est pair (on pourra raisonner par l'absurde et supposer que y est impair) et que $x \equiv 1 \pmod 4$.

2) a) Montrer que $x^2 + x + 1 \equiv 3 \pmod 4$.

b) Vérifier que $y^2 + 4 = (x-1)(x^2 + x + 1)$ (*).

c) Soit q un diviseur premier de $x^2 + x + 1$, montrer que $q \equiv 1 \pmod 4$ ou $q \equiv 3 \pmod 4$.

d) En déduire que $x^2 + x + 1$ possède au moins un diviseur premier p vérifiant : $p \equiv 3 \pmod 4$.

3) En remarquant qu'il existe un entier naturel n tel que y = 2n et en utilisant la relation ($*$) montrer que $n^2 \equiv -1 \pmod p$.

4) a) Justifier que $n^{p-1} \equiv 1 \pmod p$.

b) Montrer que $n^{p-1} \equiv -1 \pmod p$.

c) En déduire que (E) n'admet pas de solution dans IN² .

Exercice 4 : (7 points)

I) Soit la fonction f définie sur $]-\infty,1[$ par $f(x) = e^{-x} - \ln(1-x) - 2$ on note C_f la courbe de f selon un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

1) Soit u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = e^x + x - 1$.

a) Dresser le tableau de variation de u .

b) Calculer u(0) puis déduire le signe de u(x) sur $\mathbb{R}$

2) a) Vérifier que pour tout $x < 0$, $f(x) = (1-x)\left[\left(\dfrac{e^{-x}}{-x}\right)(1 - \dfrac{1}{1-x}) - \dfrac{\ln(1-x)}{1-x}\right] - 2$

En déduire $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ puis interpréter ce résultat graphiquement

b) Vérifier que pour tout $x < 1$, $f'(x) = \dfrac{e^{-x}u(x)}{1-x}$

c) Dresser le tableau de variation de f

2) On a tracé dans l'annexe ci jointe les courbes C_h et C_g des fonctions h et g définies par

$h(x) = e^{-x}$ et $g(x) = \ln(1-x) + 2$

C_h et C_g se coupent en deux points d'abscisses respectives α et β avec $\alpha < \beta$

a) Justifier que α et β sont les seules solutions de l'équation $f(x) = 0$ dans $]-\infty,1[$

b) Placer les points de C_f d'abscisses α et β

c) Tracer C_f dans l'annexe .

II) Soit la fonction F définie sur $]-\infty,1]$ par $\begin{cases} F(x)=\int_0^x f(t)dt & \text{si } x<1 \\ F(1)=-\frac{1}{e} \end{cases}$

On note (Γ) la courbe de F dans le même repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

1) a) A l'aide d'une intégration par parties montrer que pour tout $x\in]-\infty,1[$ on a :

$$\int_0^x \ln(1-t)dt=(x-1)\ln(1-x)-x$$

puis déduire que pour tout $x\in]-\infty,1[$ on a $F(x)=(1-x)(1+\ln(1-x))-e^{-x}$

b) Montrer que F est continue à gauche en 1 .

c) Etudier la dérivabilité de F à gauche en 1 puis interpréter ce résultat graphiquement

d) Dresser le tableau de variation de F .

2) a) Montrer que le point O(0,0) est un point d'inflexion de (Γ).

b) On a placé aussi dans l'annexe sur l'axe des ordonnées les points d'ordonnées $F(\alpha)$ et $F(\beta)$.

Tracer (Γ) dans l'annexe

c) On note A l'aire (en unité d'aire) de la partie hachurée du plan .

Montrer que $A=\beta e^{-\beta}-\alpha e^{-\alpha}+\alpha-\beta$.

III) On considère les suites réelles définies sur $\mathbb{N}^*\setminus\{1\}$ par $W_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}e^{-\frac{k}{n}}$; $S_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}f(\frac{k}{n})$ et $U_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\ln(1-\frac{k}{n})$

1) a) Vérifier que pour tout entier $n\geq 2$, $S_n=W_n-U_n-2+\frac{2}{n}$

b) Montrer que pour tout entier $n\geq 2$, $W_n=\dfrac{e^{-1}-e^{-\frac{1}{n}}}{n(e^{-\frac{1}{n}}-1)}$

c) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} W_n=1-\frac{1}{e}$

2) a) Montrer que pour tout entier $n\geq 2$ et pour tout $k\in\{0, 1, 2, \ldots, n-2\}$

on a : $\frac{1}{n}\ln(1-\frac{k+1}{n}) \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}\ln(1-t)dt \leq \frac{1}{n}\ln(1-\frac{k}{n})$

b) En déduire que pour tout entier $n\geq 2$; $\frac{1}{n}-1\leq U_n\leq\frac{1}{n}-1-\frac{1}{n}\ln(\frac{1}{n})$

c) Montrer alors que : $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n=-\frac{1}{e}$

3) Pour tout entier $n\geq 2$ on pose $V_n=\sqrt[n]{\dfrac{(n-1)!}{n^{n-1}}}$.

Montrer que pour tout entier $n\geq 2$ on a $U_n=\ln(V_n)$ puis déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n$

<u>Feuille annexe à remettre</u>

<u>Nom et prénom :</u> ……………………………………………….

Exercice 4 :