Lycée Pilote de L'Ariana	MATHEMATIQUES	4ème Maths
29 / 03 / 2016	Contrôle 3	Durée : 2 heures

Exercice 1 : (6 points).

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul par :
$u_n = 2^n + 3.7^n + 14^n - 1$.

1) a) Calculer u_3.

b) Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, u_n est pair.

c) On note E l'ensemble des nombres premiers qui divisent au moins un terme de la suite (u_n). Les entiers 2, 3, 5 et 7 appartiennent-ils à l'ensemble (E) ?.

2) Soit p un nombre premier strictement supérieur à 7.
Soient m et n deux entiers naturels tels que 14 = m.n.

a) Quelles sont les valeurs possibles de m?

b) Montrer que $14m^{p-2} \equiv n\ (mod\ p\ )$.

c) En déduire que $14u_{p-2} \equiv 0\ (mod\ p\ )$.

d) L'entier p appartient-il à l'ensemble E ?

e) Déterminer alors E.

Exercice 2 ; (7 points) :

n est un entier supérieur ou égal à 2. On considère les fonctions f et g définies sur IR+ par : $f(\,x\,) = e^{-\frac{1}{n}x} - e^{-x}$ et $g(\,x) = f(\frac{1}{n}x\,)$.

1) Montrer que pour tout $x\ \geq 0; f(x) \geq 0$.

2) Etudier les variations de f. f admet-elle un maximum ? Si oui en quel réel est-il atteint ?

3) Donner l'équation de la demi-tangente au point d'abscisse 0 à la courbe C de f.

4) a) Etudier le sens de variations de la fonction g. g admet-elle un maximum ? si oui le comparer à celui de f.

b) Donner l'équation de la demi-tangente au point d'abscisse 0 à la courbe Cg de la fonction g.

c) Dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}; \vec{j}\,)$ tracer les allures des courbes représentatives de f et de g pour n = 2. (Unité graphique 2cm).

5) a) Prouver que si $x \in [\,0; \frac{n\ln(n)}{n-1}]$ alors $g(x) \leq f(x)$ puis que si $x \in [\,\frac{n^2\ln(n)}{n-1}; +\infty[$ alors $g(x) \geq f(x)$.

b) Montrer que l'équation $f(x) = g(x)$ admet une unique solution notée u_n, appartenant à $[\,\frac{n\ln(n)}{n-1}; \frac{n^2\ln(n)}{n-1}\,]$.

c) Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\geq 2}$ quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 3 : (7 points).

Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct (O, $\vec{i}$; $\vec{j}$). on donne deux points distincts F et A, symétriques par rapport à l'axe (O, $\vec{i}$) tel que les points O, A et F ne sont pas alignés.

On désigne par (H) l'hyperbole d'excentricité 2 qui admet F pour foyer et (O, $\vec{i}$) pour directrice associée à F.

1) a) Montrer que A est un sommet de (H).

b) Dans le graphique ci-dessous. Construire l'autre sommet A' puis placer le centre Ω et le second foyer F' de (H).

c) Construire les asymptotes puis tracer l'allure de (H).

2) Soit (C) le cercle passant par F et de centre O. Construire (C) sur la figure.
<u>On se propose</u> de montrer que (H) ∩ (C) = { A, M_1,M_2,M_3 } où M_1,M_2 et M_3 sont les sommets d'un triangle équilatéral.
A chaque point M d'affixe z = x + iy ; on désigne par a l'affixe de F.

a) Montrer que M(z) appartient à (C) si et seulement si : $z\bar{z} - a\bar{a} = 0$.

b) Montrer de même que M(z) appartient à (H) si et seulement si :
$(z - a)(\bar{z} - \bar{a}) + (z - \bar{z})^2 = 0$.

c) En déduire que M(z) appartient à (C) ∩ (H) si et seulement si
$$\begin{cases} z\bar{z} - a\bar{a} = 0 \\ (z - \bar{a})(z^3 - a^2\bar{a}) = 0 \end{cases}.$$

d) On pose $a = re^{i\theta}$, r > 0 et $\theta \in IR$.
Résoudre alors l'équation $(z - \bar{a})(z^3 - a^2\bar{a}) = 0$ puis conclure.