

Dérivabilité

Dérivabilité en un point:

On dit qu'une fonction f est dérivable en un point x_0 si la limite : $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ est finie

Cette limite est nommée le nombre dérivé de la fonction f en x_0 et on écrit : $f'(x_0)$

Equation de la tangente à la courbe d'une fonction – la fonction affine tangente à la courbe d'une fonction:

Soit f une fonction dérivable en x_0

- L'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse x_0 est :
 $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$
- La fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par : $u(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ est la fonction affine tangente à la courbe de la fonction f au point d'abscisse x_0 et c'est une approche de la fonction f au voisinage de x_0

Dérivabilité à droite – à gauche, en un point:

On dit que f est dérivable à droite en x_0 si la limite : $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ est finie

Cette limite est nommée le nombre dérivé de la fonction f à droite en x_0 et on écrit : $f'_d(x_0)$

On dit que f est dérivable à gauche en x_0 si la limite : $\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ est finie

Cette limite est nommée le nombre dérivé de la fonction f à gauche en x_0 et on écrit : $f'_g(x_0)$

On dit qu'une fonction f est dérivable en un point x_0 si elle est dérivable à droite et à gauche en x_0 ,
et $f'_d(x_0) = f'_g(x_0)$

La dérivabilité et la continuité:

Si une fonction f est dérivable en x_0 , alors f est continue en x_0

Tableaux des dérivées de quelques fonctions usuelles:

$f(x)$	$f'(x)$	
k	0	
x	1	$(x \in \mathbb{R})$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	
x^r	rx^{r-1}	$(r \in \mathbb{Q}^* - \{1\})$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	

Opérations sur les fonctions dérivables:

$(u+v)' = u' + v'$	$(u-v)' = u' - v'$	$(k \in \mathbb{R}); (ku)' = ku'$
$(uv)' = u'v + uv'$	$(u^n)' = nu'u^{n-1}$	
$\left(\frac{1}{v}\right)' = \frac{-v'}{v^2}$	$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$	

La dérivée du composé de deux fonctions – la dérivée de la fonction racine carrée:

$(u \circ v)' = v' \times [u' \circ v]$	$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$
---	--------------------------------------

La dérivation et les variations d'une fonction:

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I

$\forall x \in I; f'(x) \geq 0 (f'(x) > 0) \Leftrightarrow f$ est croissante (strictement croissante) sur l'intervalle I

$\forall x \in I; f'(x) = 0 \Leftrightarrow f$ est constante sur l'intervalle I

$\forall x \in I; f'(x) \leq 0 (f'(x) < 0) \Leftrightarrow f$ est décroissante (strictement décroissante) sur l'intervalle I

La dérivation et l'interprétation géométrique:

La limite	Déduction	Interprétation géométrique la courbe (C_f) admet :
$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f'(x_0)}{x - x_0} = a; (a \neq 0)$	f est dérivable en x_0	Une tangente au point $A(x_0; f(x_0))$ de coefficient directeur a
$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f'(x_0)}{x - x_0} = 0$		Une tangente horizontale au point $A(x_0; f(x_0))$
$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f'(x_0)}{x - x_0} = a; (a \neq 0)$	f est dérivable à droite en x_0	Une demi-tangente à droite du point $A(x_0; f(x_0))$
$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f'(x_0)}{x - x_0} = 0$		Une demi-tangente horizontale au point $A(x_0; f(x_0))$
$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f'(x_0)}{x - x_0} = -\infty$	f n'est pas dérivable à droite en x_0	Une demi-tangente verticale à droite au point $A(x_0; f(x_0))$ dirigé vers le bas
$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f'(x_0)}{x - x_0} = +\infty$		Une demi-tangente verticale à droite au point $A(x_0; f(x_0))$ dirigé vers le haut
$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f'(x_0)}{x - x_0} = a; (a \neq 0)$	f est dérivable à gauche en x_0	Une demi-tangente à gauche du point $A(x_0; f(x_0))$
$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f'(x_0)}{x - x_0} = 0$		Une demi-tangente horizontale au point $A(x_0; f(x_0))$
$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f'(x_0)}{x - x_0} = -\infty$	f n'est pas dérivable à gauche en x_0	Une demi-tangente verticale à gauche au point $A(x_0; f(x_0))$ dirigé vers le haut
$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f'(x_0)}{x - x_0} = +\infty$		Une demi-tangente verticale à gauche au point $A(x_0; f(x_0))$ dirigé vers le bas