EXERCICE 1 :

Le plan P est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

Les parties A et B sont indépendantes.

A/On considère dans C l'équation :

$$E_\theta : z^2 - 2\cos\theta\, z - 2i\sin\theta = 0 \quad \text{où } \theta \in [0, \pi]$$

1. Résoudre dans C l'équation E_θ.
2. Donner la forme exponentielle des nombres complexes suivants :

$$z' = 1 + e^{i\theta} \qquad\qquad z'' = -1 + e^{-i\theta}$$

3. Déterminer et construire l'ensemble des points M' d'affixe z' quand θ varie dans $[0, \pi]$.

B/ On prend $\theta = \frac{\pi}{2}$ et on considère les points A, B et C d'affixes respectives :

$$z_A = 1 \qquad z_B = 1 + i \qquad z_C = -1 - i$$

A tout point M d'affixe z, on associe les points M_1 et M_2 d'affixes respectives z_1 et z_2 tels que :

$$M_1 = R_{(A,\frac{\pi}{2})}(M) \quad M_2 = t_{\overrightarrow{CO}}(M)$$

1. a. Exprimer z_1 et z_2 en fonction de z.

   b. En déduire que pour tout $z \in C\setminus\{-1-i\}$ on a : $\frac{z_1}{z_2} = i\frac{[z - z_B]}{[z - z_C]}$

2. a. Montrer que pour tout $M \in P\setminus\{B, C\}$ on a :

$$\left(\overrightarrow{BM},\overrightarrow{CM}\right) \equiv \frac{\pi}{2} + \left(\overrightarrow{OM_1},\overrightarrow{OM_2}\right)[2\pi]$$

   b. Déterminer l'ensemble $\zeta = \{M \in P\setminus\{B, C\} ; (OM_1)// (OM_2)\}$; et construire les points M_1 et M_2 pour M de ζ .

3. a. Exprimer z_2 en fonction de z_1.

   b. En déduire que M_2 est l'image de M_1 par une rotation R dont on précisera l'angle et le centre.

EXERCICE 2 :

1. On considère l'équation (E) :

$$109x - 226y = 1 \qquad \text{où } x \text{ et } y \text{ sont des entiers relatifs.}$$

a. Déterminer le pgcd de 109 et 226.

b. Vérifier que $109 \times 141 \equiv 1 \pmod{226}$.

c. Montrer que l'ensemble de solutions de (E) est l'ensemble des couples de la forme $(141 + 226k, 68 + 109k)$, où k appartient à Z.

d. En déduire qu'il existe un unique entier naturel non nul d inférieur ou égal à 226 et un unique entier naturel non nul e tels que

$109d = 1 + 226e$.

(On précisera les valeurs des entiers d et e.)

2. Démontrer que 227 est un nombre premier.

3. On note A l'ensemble des 227 entiers naturels a tels que $a \leq 226$.

On considère les deux fonctions f et g de A dans A définies de la manière suivante :

à tout entier a de A, f associe le reste de la division euclidienne de a^{109} par 227.

à tout entier a de A, g associe le reste de la division euclidienne de a^{141} par 227.

a. Vérifier que $g[f(0)] = 0$.

b. Montrer que, quel que soit l'entier non nul a de A, $a^{226} \equiv 1 \pmod{227}$.

c. En utilisant ce qui précède en déduire que, quel que soit l'entier non nul a de A. $g[f(a)] = a$.

Que peut-on dire de $f[(g(a)] = a$?

EXERCICE 3 :

1 Sami se rend à une salle de jeux pour s'adonner à son jeu électronique favori.

Chaque partie de ce jeu est un duel entre Sami et un adversaire virtuel choisi aléatoirement par la machine.

La machine choisit comme adversaire soit YOGO soit TOMI, avec la même probabilité $\frac{1}{2}$.

La probabilité pour que Sami soit vainqueur contre YOGO est égale à $\frac{1}{4}$.

La probabilité pour que Sami soit vainqueur contre TOMI est égale à $\frac{2}{5}$.

On appelle :

A l'événement : " Sami combat YOGO ",
B l'événement : " Sami combat TOMI ",
V l'événement : " Sami est vainqueur".

1. **Sami joue une partie .**

a. Calculer $p(A\cap V)$.
b. Calculer $p(B\cap V)$.
c. En déduire que $p(V) = 0{,}325$.

2. **Étude de la dépense occasionnée si Sami joue plusieurs parties.**

Sami paie un Dinars par partie, or il n'a que quatre Dinars en poche.
Il joue une première fois. S'il est vainqueur, il arrête. Sinon il joue une deuxième fois.
S'il est vainqueur, il arrête. Sinon il joue une troisième fois.
S'il est vainqueur, il arrête. Sinon il joue une quatrième fois.
Après cette éventuelle quatrième partie, il doit s'arrêter, quel qu'en soit le résultat.
On suppose que les résultats de parties successives sont indépendants.

a. A l'aide d'un arbre pondéré, décrire toutes les situations possibles.
b. On appelle X la variable aléatoire égale à la dépense de Sami, en Dinars.
c. Recopier et compléter le tableau suivant donnant la loi de probabilité de X.

Écrire les résultats avec trois décimales.

Dépense x_i	1	2	3	4
$p(x = x_i)$				

3.Calculer l'espérance mathématique de X que l'on donnera avec deux décimales.

EXERCICE 4:

A/ Soit f la fonction définie sur R par : $f(x) = e^{x} - e^{-x}$

On désigne par C la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(0, \vec{i}, \vec{j})$.

1. a- Dresser le tableau de variation de f.

b- Montrer que le point O (0, 0) est un point d'inflexion de C.

c- Tracer C.

2. a- Montrer que f est une bijection de R sur R.

b- Tracer la courbe C' représentative de la fonction f^{-1}.

c- Montrer que pour tout x de R ; $f^{-1}(x) = \ln\left(\dfrac{x+\sqrt{x^2+4}}{2}\right)$

B/ pour tout entier naturel n et pour tout réel positif x on pose :

$$F_n(x) = \frac{1}{(2n+1)!}\int_0^x (x-t)^{2n+1} f(t)dt .$$

1. a- Calculer $F_0(x)$.

b- Montrer que pour tout entier naturel non nul k on a :

$$F_k(x) = F_{k-1}(x) - 2\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

c- En déduire que pour tout entier naturel n et pour tout réel x positif :

$$F_n(x) = f(x) - 2\sum_{k=0}^{k=n}\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

2. a- Montrer que pour tout entier naturel n non nul et pour tout réel x positif de $[0,1]$ $\qquad 0 \le F_n(x) \le \dfrac{f(x)}{n}$

b- En déduire $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} F_n(x)$

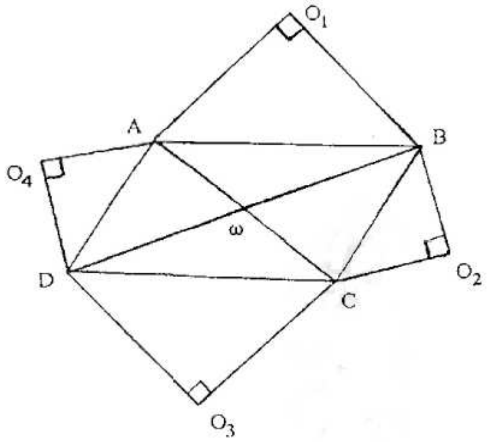
3. Montrer que $\lim\limits_{n\mapsto+\infty}\sum_{k=0}^{k=n}\dfrac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \dfrac{f(x)}{2}$

L-P-Bourguiba de Tunis | Prof :Ben jedidia Chokri

Sujet de révision

Mai 2021 | 4Math | Durée :4h

EXERCICE BAC 1996



Dans la figure ci-contre, ABCD est un parallélogramme de centre ω et les triangles ABO_1, BCO_2, CDO_3 et DAO_4 sont des triangles rectangles isocèles de sommets principaux respectifs O_1, O_2, O_3 et O_4. On suppose que le plan est orienté et que $(\widehat{\overrightarrow{O_1A}, \overrightarrow{O_1B}}) = \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

On désigne par R_1, R_2, R_3 et R_4 les rotations d'angle $\frac{\pi}{2}$ et de centres respectifs O_1, O_2, O_3 et O_4.

1) a - Déterminer $(R_2 o R_1)(A)$; $(R_3 o R_2)(B)$ et $(R_4 o R_3)(C)$.

b - Montrer que les applications $R_2 o R_1$, $R_3 o R_2$, $R_4 o R_3$ sont toutes les trois égales à une même application que l'on déterminera et que l'on désignera par f.

2) a - Montrer que $R_3(R_2(O_1)) = R_2(O_1)$ et déterminer $f(O_1)$

b - Montrer que $f(O_2) = O_4$.

c - Quelle est la nature du quadrilatère $O_1O_2O_3O_4$?

3) Soit Δ la médiatrice du segment [AB] et S_Δ la symétrie orthogonale d'axe Δ. On pose $g = R_2 o S_\Delta$

a - Déterminer $g(A)$ et $g(O_1)$

b - Montrer que g n'est pas une symétrie axiale et en déduire la nature de g.

c - Construire le point $\omega' = g(\omega)$. Déterminer les éléments caractéristiques de g.

EXERCICE BAC 2020

On dispose d'une urne U_1 contenant deux boules noires et deux boules blanches et d'une urne U_2 contenant une boule noire et trois boules blanches. Toutes les boules sont indiscernables au toucher. On procède à l'expérience aléatoire suivante :

On tire au hasard une boule de U_1.

- Si elle est blanche, on la remet dans U_1 et on tire simultanément deux boules de U_2,

- Si elle est noire, on la met dans U_2 et on tire simultanément deux boules de U_2.

On considère les évènements suivants :

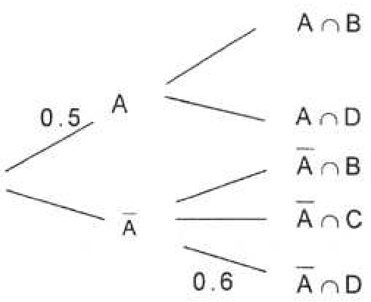
A « La boule tirée de U_1 est blanche. »

B « On tire deux boules blanches de l'urne U_2. »

C « On tire deux boules noires de l'urne U_2. »

D « On tire deux boules de couleurs différentes de l'urne U_2. ».

a) Recopier et compléter l'arbre de choix suivant :



b) Déterminer $p(B)$ et $p(D)$.

c) Montrer que la probabilité qu'il ne reste aucune boule noire dans U_2 est égale à $\frac{3}{10}$

Soit X la variable aléatoire ayant pour valeur le nombre de boules noires restantes dans U_2.

a) Déterminer la loi de probabilité de X.

b) Quelle est la probabilité qu'il reste au moins une boule noire dans U_2 ?

On répète n fois de suite $(n>1)$ et de manière indépendante l'expérience aléatoire précédente. On désigne par F_n l'évènement : « Il ne reste dans U_2 aucune boule noire pour les $(n-1)$ premières épreuves et il reste au moins une boule noire à la $n^{ème}$ épreuve ».

Quelle est la probabilité p_n de F_n ?

EXERCICE BAC 2018

A) Soit q un entier naturel.

1) Montrer que q^2 est impair si et seulement si q est impair.

2) Montrer que si q est impair alors $q^2 \equiv 1 \pmod 8$.

B) On se propose de déterminer **l'ensemble A des triplets d'entiers naturels non nuls** (m, n, q) **tels que** $2^{2m} + 3^{2n} = q^2$.

1) Vérifier que le triplet $(2,1,5)$ est un élément de A.

Dans la suite de l'exercice on suppose que (m, n, q) **est un élément de A.**

2) a) Montrer que q est impair.

b) Montrer que $q^2 - 3^{2n} \equiv 0 \pmod 8$.

c) Montrer alors que m est différent de 1.

3) On suppose que $m \geq 2$.

a) Justifier que les entiers $(q-3^n)$ et $(q+3^n)$ sont pairs.

b) Soit $d = (q-3^n) \wedge (q+3^n)$.

Montrer que d divise $2q$ et que d divise 2^{2m}. En déduire que $d = 2$.

c) Montrer que $q - 3^n = 2$ et que $q + 3^n = 2^{2m-1}$.

En déduire que $q = 2^{2m-2} + 1$ et que $3^n = 2^{2m-2} - 1$.

4) Déterminer n et q lorsque $m = 2$.

5) On suppose que $m \geq 3$.

a) Montrer que $3^n \equiv -1 \pmod{16}$.

b) Déterminer, suivant les valeurs de l'entier naturel k, les restes possibles de 3^k dans la division euclidienne par 16.

c) En déduire qu'il n'existe pas de triplets (m,n,q) éléments de l'ensemble A tels que $m \geq 3$.

6) Déterminer l'ensemble A.

EXERCICE BAC 2004

A – On considère la fonction f_1 définie sur $[-1,+\infty[$ par $f_1(x) = \sqrt{1+x}\; e^{-x}$ et on désigne par $\mathscr{C}_1$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) a – Etudier la dérivabilité de f_1 à droite de -1.
   b – Interpréter graphiquement le résultat obtenu.
   c – Calculer la limite de f_1 en $+\infty$.
   d – Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

2) Dresser le tableau de variation de f_1.

3) Donner l'équation de la tangente à $\mathscr{C}_1$ au point d'abscisse 0.

4) Montrer que l'équation $f_1(x) = x$ admet une unique solution α dans $[-\frac{1}{2}, +\infty[$ et que $\alpha \in]\frac{1}{2}, 1[$.

5) Tracer la courbe $\mathscr{C}_1$.

6) a – Montrer que pour tout réel x, on a $1 + x \leq e^x$.
   b – En déduire que pour tout réel $x \geq -1$, on a $f_1(x) \leq e^{-\frac{x}{2}}$.

7) Soit λ un réel supérieur ou égal à 1 et $S(\lambda) = \int_1^{\lambda} f_1(x)\,dx$.
   a – Donner une interprétation graphique du réel $S(\lambda)$.
   b – Montrer que pour tout $\lambda \geq 1$, on a $0 \leq S(\lambda) \leq \frac{2}{\sqrt{e}}$.

B – Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on considère la fonction f_n définie sur $[-1,+\infty[$ par $f_n(x) = \sqrt{1+x}\; e^{-\frac{x}{n}}$.
On désigne par $\mathscr{C}_n$ la courbe représentative de f_n dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) Montrer que toutes les courbes $\mathscr{C}_n$ passent par deux points fixes dont on déterminera les coordonnées.

2) a – Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, la courbe $\mathscr{C}_n$ admet une tangente horizontale en un point M_n.
   b – On désigne par α_n l'abscisse de M_n. Etudier la nature de la suite (α_n).

3) Etudier la position relative des courbes $\mathscr{C}_n$ et $\mathscr{C}_{n+1}$.

4) On pose $I = \int_{-1}^{1} \sqrt{1+x}\,dx$ et on désigne par (A_n) la suite définie pour tout n de $\mathbb{N}^*$ par
   $A_n = \int_{-1}^{1} f_n(x)\,dx$.
   a – Calculer I .
   b – Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on a $1 - e^{\frac{1}{n}} \leq e^{-\frac{1}{n}} - 1$.
   c – En déduire que pour tout $x \in [-1, 1]$, $|e^{-\frac{x}{n}} - 1| \leq e^{\frac{1}{n}} - 1$.
   d – Montrer que $|A_n - I| \leq \frac{4}{3}\sqrt{2}\,(e^{\frac{1}{n}} - 1)$.
   e – En déduire que la suite (A_n) est convergente et donner sa limite.

EXERCICE 1 :(5 points)

Dans le plan orienté, on considère un rectangle ABCD

tel que AB=2AD =2 et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$.

Soient I et J les milieux respectifs de [AB] et [DC].

1.On pose $f = t_{\overrightarrow{JB}} o R_{(J, -\frac{\pi}{2})}$.

a. Identifier $S_{(IC)} o S_{(AJ)}$ et $S_{(AJ)} o S_{(IJ)}$.

b. Déduire que f est une rotation que l'on caractérisera.

2.On pose $g = f o S_{(JD)}$.

a. Déterminer g(D) et g(J) .

b. Montrer que g n'admet pas de point invariant.

c. En déduire que g est une symétrie glissante .Déterminer alors l'axe Δ de g et son vecteur $\vec{u}$.

3.Pour tout point M du plan on considère les points M_1=g(M) et M_2= $t_{\overrightarrow{DI}}$(M).

Montrer que M_1 et M_2 sont symétriques par rapport à une droite que l'on déterminera.

4.On muni le plan d'un repère orthonormé $(A, \overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AD})$ et soit φ l'application qui à tout point M d'affixe z on associé le point M' d'affixe z' tel que z'= $-i\bar{z}+3+i$

a.Montrer que φ est une isométrie.

b.Déterminer l'ensemble des points invariants par φ et déduire la nature de .

c. Montrer que φ o φ est une translation et déduire le vecteur et l'axe de φ

d.Prouver que φ =g.

EXERCICE 2 : (4 points)

Soit n un entier naturel non nul et f_n la fonction définie sur $[-1,1]$ par : $f_n(x) = x^n\sqrt{1-x^2}$

On désigne par Cf_n la courbe représentative de f_n dans le plan rapporté repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Dresser selon la parité de n le tableau de variation de f_n.
2. Construire Cf_1 et Cf_2
3. Soit la fonction Ψ définie sur $[-1,1]$ par : $\Psi(x) = \int_0^x f_2(t)dt$.

Et Soit la fonction F définie sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ par : $F(\theta) = \Psi(\sin\theta)$.

a .Montrer que F est dérivable sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ et déterminer sa fonction dérivée

b. Montrer que pour tout réel θ de $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ $F(\theta) = \frac{\theta}{8} - \frac{1}{32}\sin(4\theta)$

4. En déduire la valeur de $A = \int_{-1}^{1} f_2(x)dx$ .Que représente la valeur trouvée ?
5. Calculer l'aire comprise entre les deux courbes Cf_1 et Cf_2
6. On pose $I_n = \int_0^1 f_n(x)dx$

a. En utilisant une intégration par parties, montrer que pour tout $n \geq 2$, $I_{n+1} = \frac{n}{n+3} I_{n-1}$

b.Montrer que $I_{2n} = \pi.\frac{(2n)!}{2^{2n+2} n!(n+1)!}$

EXERCICE 3 : (5 points)

Pour tout entier naturel $n \geq 1$.

On pose $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos t \cdot \sin^n t}{1-\sin t} dt$ et $U_n = 1 \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times (\frac{1}{2})^2 + \ldots + \frac{1}{n} \times (\frac{1}{2})^n$

1. Montrer que pour tout réel t de $\left[0, \frac{\pi}{6}\right]$ et pour tout entier naturel $n \geq 1$.

$\cos t(1+\sin t+\sin^2 t+\sin^3 t+\ldots+\sin^{n-1} t)=\frac{\cos t}{1-\sin t} - \frac{\cos t.\sin^n t}{1-\sin t}$

2. a- Montrer que pour tout entier naturel $n \geq 1$. $0 \leq I_n \leq \frac{2}{n+1}$

b- En déduire que : $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n = 0$

3. a- Montrer que $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos t}{1-\sin t} dt - U_n$

b- En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$

EXERCICE 4 : (6 points)

Soit la fonction f définie sur $\left]-1,1\right[$ par : $f(x)=\frac{x}{\sqrt{1-x^4}}$

1. Montrer que f est une bijection de $\left]-1,1\right[$ sur un intervalle I que l'on déterminera.

2. Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} continue sur I.

3. On désigne par Cf et Cf^{-1} les courbes représentatives de f et f^{-1}

dans le plan rapporté à un même repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$.

Tracer avec soin Cf et Cf^{-1}

4. Soit la fonction F définie sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ par : $F(\theta)=\int_0^{\sqrt{\sin\theta}} \frac{x}{\sqrt{1-x^4}} dx$.

a-Montrer que F est dérivable sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ et pour tout réel θ de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ $F'(\theta)=\frac{1}{2}$

b- En déduire $F(\theta)$

c- Calculer $A=\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{x}{\sqrt{1-x^4}} dx$ Que représente la valeur trouvée.

d- En déduire la valeur de $\int_0^{\sqrt{\frac{2}{3}}} f^{-1}(x) dx$