Questions Analyse

Dans la suite du programme d'analyse on étudie les fonctions polynômes, rationnelles, irrationnelles, logarithme et exponentielles.

Les outils nécessaires pour bien traiter cette partie sont :

Q1 Etudier les variations de f sur I.

R1

1) Voir que f est définie sur I
2) Continuité et dérivabilité de f sur I.
3) Calculer f' et déterminer son signe
4) Dresser le tableau de variation de f sur I plus le calcul des limites de f aux bornes de I.

Q2 Montrer que f est une bijection de I sur $f(I)$, ou montrons que f admet une fonction réciproque f^{-1}.

R2
1) Voir le tableau de variation de f.
2) Dire que f est continue et strictement monotone sur I.

Q3 Montrons que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution $\alpha \in I$, et vérifier que $\alpha \in]a,b[$.

R3
1) f est une bijection de I sur $f(I)$
2) $0 \in f(I)$, donc il existe unique α tel que $f(\alpha)=0$
3) $f(a) \cdot f(b) < 0 \Rightarrow \alpha \in]a,b[$

Q4 Montrons que $f(x)=x$ admet une unique solution $\alpha \in I$, puis vérifier que $\alpha \in]a,b[$

R4 On pose $g(x) = f(x) - x$
1) g est une bijection de I sur $f(I)$
2) $0 \in g(I)$, donc il existe unique α tel que $g(\alpha)=0$ ou $(f(\alpha)=\alpha)$

3) $g(a) \cdot g(b) < 0 \Rightarrow \alpha \in]a,b[$

Q5 Expliciter $f^{-1}(x)$.

R5 1) On pose $f^{-1}(x) = y$ où $x \in f(I)$ alors $f(y) = x$

ou $y \in I$

2) Exprimer y en fonction de x.

Q6 Montrons que f^{-1} est dérivable sur $f(I)$

R6 1) f est dérivable sur I

2) f' ne s'annule pas sur I.

3) f est strictement monotone sur I.

Q7 Calculer $(f^{-1})'(x)$

R7 1) $(f^{-1})'(x) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \dfrac{1}{f'(y)}$

2) Remplacer $f^{-1}(x)$ par y.

3) Voir la dérivée f'.

Q8 Interpréter : $\lim\limits_{x \to x_0^{\pm}} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \pm\infty$

et $\lim\limits_{x \to x_0^{\pm}} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = 0$

R8 1) $\lim\limits_{x \to x_0^{\pm}} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \pm\infty$

$\mathcal{C}_f$ admet au point d'abscisse x_0 une demi-tangente verticale.

2) $\lim\limits_{x \to x_0^{\pm}} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = 0$

$\mathcal{C}_f$ admet au point d'abscisse x_0 une demi-tangente horizontale

Q9 Ecrire une équation de la tangente (T) à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse x_0.

R9 $(T) : y = f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0)$

Q10 Etudier la position relative de $\mathcal{C}_f$ et la tangente (T).

R10 1) Calculer $f(x) - y$

2) Etudier son signe
- positif $\to$ $\mathcal{C}_f$ au dessus de (T)
- négatif $\to$ $\mathcal{C}_f$ au dessous de (T)

Q_{11} Montrons que $I(x_0, f(x_0))$ est un point d'inflexion.

R_{11}
1) Calculer $f''(x)$
2) Voir que f'' s'annule et change de signe en x_0.

Q_{12} Trouver $\mathcal{C}_f \cap \Delta$ avec $\Delta : y = ax+b$

R_{12}
1) Résoudre l'équation : $f(x) = ax+b$
2) Trouver x puis y.

Q_{13} Trouver $\mathcal{C}_f \cap (O, \vec{i})$ avec $(O, \vec{i}) : y = 0$
1) Résoudre l'équation : $f(x) = 0$
2) Trouver x puis $y = 0$

Q_{14} Montrons que la courbe $\mathcal{C}_f$ coupe la droite $y = x$ en un point que l'on précisera.

R_{14}
1) Avoir $f(x) = x$ admet une solution unique α
2) Le point d'intersection est $I(\alpha, \alpha)$ car $f(\alpha) = \alpha$

Q15 Montrons que $D : x = a$ est une asymptote verticale à $\mathcal{C}_f$.

R15 $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$

Q16 Montrons que $D' : y = b$ est une asymptote horizontale à $\mathcal{C}_f$.

R16 $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = b$

Q17 Montrons que $\Delta : x = a$ est un axe de symétrie pour $\mathcal{C}_f$.

R17
1) Si $x \in D_f$ alors $2a - x \in D_f$
2) $f(2a - x) = f(x)$

Q18 Montrons que $I(a, b)$ est un centre de symétrie pour $\mathcal{C}_f$.

R18
1) Si $x \in D_f$ alors $2a - x \in D_f$
2) $f(2a - x) = 2b - f(x)$

Q_{19} Montrons que f est paire ou montrons que $\Delta : x=0$ est un axe de symétrie de $\mathscr{C}_f$.

R_{19}
1) Si $x \in D_f$ alors $(-x) \in D_f$
2) $f(-x) = f(x)$

Q_{20} Montrons que f est impaire ou montrons que $O(0,0)$ est un centre de symétrie de $\mathscr{C}_f$.

R_{20}
1) Si $x \in D_f$ alors $(-x) \in D_f$
2) $f(-x) = -f(x)$

Q_{21} Tracer $\mathscr{C}_f$ dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ après avoir étudier f.

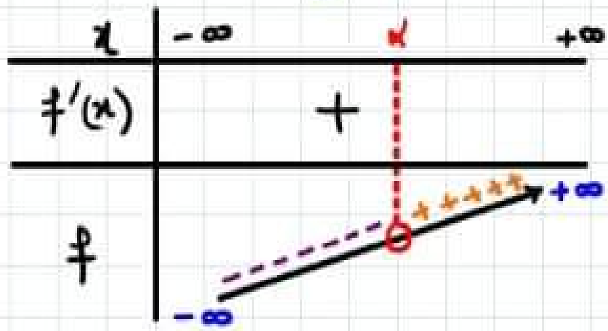
R_{21}
1) Préciser les asymptotes ou les branches infinies
2) Si f' s'annule en x_0, on présente une tangente horizontale en ce point.

Q22 Tracer $\mathcal{C}_{f^{-1}}$ après avoir tracer $\mathcal{C}_f$

R22

1) Faire la symétrie de $\mathcal{C}_f$ par rapport à $\Delta : y = x$
2) On permute x et y
3) On permute horizontale et verticale

Q23 Préciser le signe de f.



R23 f est strictement croissante sur $D_f = \mathbb{R}$.

- Si $x < \alpha$ alors $f(x) < f(\alpha) = 0$
- Si $x > \alpha$ alors $f(x) > f(\alpha) = 0$
- $f(\alpha) = 0$