

Etude de fonction

* Continuité

Q: M_q f est continue en a .

R: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

Q: M_q f est continue sur I .

R: $x \mapsto P(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$

P: polynôme
Q: Rationnelle

$x \mapsto Q(x)$ est continue sur D_Q .

□ $x \mapsto f(x)$ est continue sur I

alors $x \mapsto |f(x)|$ " "

□ $x \mapsto f(x)$ est continue et positive sur I .

alors $x \mapsto \sqrt{f(x)}$ " sur I .

Dérivabilité

□ $T_a: y = f'(a)(x-a) + f(a)$ éq de la tangente à γ_f en a .

□ $T_a \parallel \Delta: y = \alpha x + \beta \Rightarrow f'(a) = \alpha$

$T_a \perp \Delta: y = \alpha x + \beta \Rightarrow f'(a) \times \alpha = -1$.

lecture graphique

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \begin{cases} +\infty \\ -\infty \end{cases} \quad \left. \begin{array}{l} \uparrow \\ \downarrow \end{array} \right\} \text{non dérivable}$$

$$f'(a) = \begin{cases} 0 \\ \oplus \\ \ominus \end{cases} \quad \left. \begin{array}{l} \rightarrow \\ \leftarrow \end{array} \right\} \text{dérivable.}$$

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \begin{cases} +\infty \\ -\infty \end{cases} \quad \begin{array}{l} \uparrow \\ \downarrow \end{array}$$

$$\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \begin{cases} -\infty \\ +\infty \end{cases} \quad \begin{array}{l} \uparrow \\ \downarrow \end{array}$$

Approximation affine.

$$f(a+h) \simeq f(a) + h \times f'(a)$$

$\downarrow$
 très proche de zéro

Exemple: Donner une valeur approchée de

$$f(1,999) = f(2 - 0,001)$$

$$\simeq f(2) - 0,001 \times f'(2)$$

Sens de variation

$$\text{si } f'(x) = \begin{cases} + \\ - \\ 0 \end{cases} \quad \left\{ \begin{array}{l} \nearrow \\ \searrow \\ \text{constante} \end{array} \right.$$

fonctions dérivées

$$(ck)' = 0 ; (x)' = 1 ; (2x)' = 2 ; (-3x)' = -3.$$

$$(x^2)' = 2x ; (x^3)' = 3x^2 ; (x^4)' = 4x^3$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$$

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$



$$(3x^3 - 2x^2 + x - 1)' = 9x^2 - 4x + 1$$

$$(U + V)' = U' + V'$$

$$(UV)' = U'V + V'U$$

$$\square (x^2 + \sqrt{x})' = 2x + \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\square (x\sqrt{x})' = 1 \times \sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot x$$

$$\left(\frac{U}{V}\right)' = \frac{U'V - V'U}{V^2}$$

$$\left(\frac{1}{U}\right)' = -\frac{U'}{U^2}$$

$$\left(\frac{x+1}{2x-3}\right)' = \frac{1(2x-3) - 2(x+1)}{(2x-3)^2}$$

$$(\sqrt{U})' = \frac{U'}{2\sqrt{U}}$$

$$(\sqrt{x^2 - 3x})' = \frac{2x - 3}{2\sqrt{x^2 - 3x}}$$

Branches infinies.

Q: Hq $\Delta: y = ax + b$ est asymptote à ℓ_f au $v(\pm\infty)$

$$\boxed{R} \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) - y = \dots = 0$$

ou

Q: Hq ℓ_f admet une asymptote oblique que l'impression.

$$\boxed{R_1}: \text{Si } f(x) = ax + b + g(x) \text{ et } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) = 0$$

Donc $\Delta: y = ax + b$ est une asymptote à ℓ_f au $v(\pm\infty)$

Re si $f(x) \neq ax + b + o(x)$

□ $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \dots = a$

□ $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) - ax = \dots = b.$

Donc $\Delta: y = ax + b$ est asymptote à f en $\pm\infty$

□ $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = y_0 \in \mathbb{R} \Rightarrow$ la droite d'équation $y = y_0$ est asymptote à f en $\pm\infty$

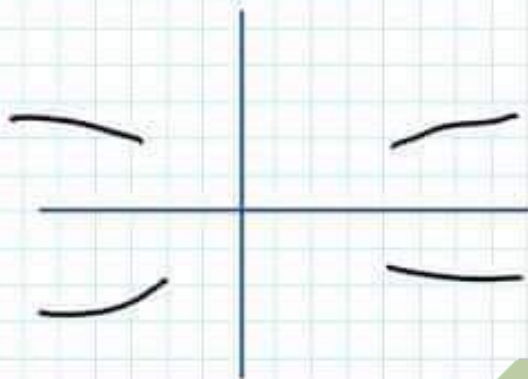
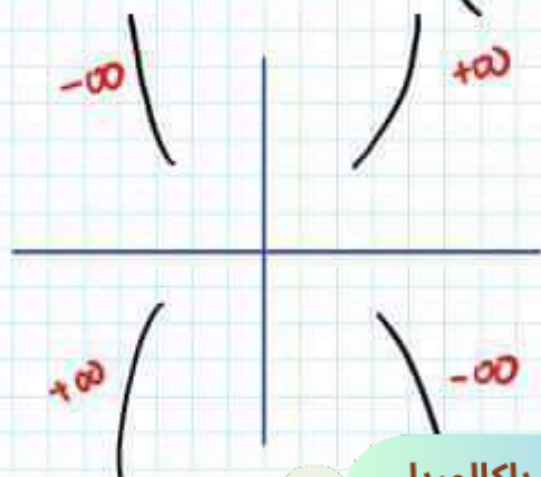
□ $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm\infty \Rightarrow$ la droite d'équation $x = x_0$ est asymptote à f

Branche parabolique.

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$

on calcule

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \begin{cases} 0 \\ +\infty \\ -\infty \end{cases} \rightarrow \text{B.P de direction } \begin{pmatrix} 0, \vec{i} \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} 0, \vec{j} \end{pmatrix}$



Axe de symétrie $x=a$

Q: Mg la droite $\Delta: x=a$ est axe de symétrie de f

$$R \quad \forall x \in D_f \Rightarrow \begin{cases} \square 2a-x \in D_f \\ \square f(2a-x) = f(x) \end{cases}$$

Si $a=0$ dnc f est paire.

Centre de symétrie $\Omega(a,b)$

Q: Mg le point $\Omega(a,b)$ est un centre de symétrie de f

$$R \quad \forall x \in D_f \Rightarrow \begin{cases} \square 2a-x \in D_f \\ \square f(2a-x) + f(x) = 2b \end{cases}$$

Si $a=b=0$ dnc f est impaire.

Q: Mg f a dnc une branche parabolique de direction $y=ax$ au $v(\pm\infty)$.

$$R \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = a \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) - ax = \pm\infty$$