Limites

Limites des fonctions $(n \in \mathbb{N}^*)\ x \mapsto x^n$ et $x \mapsto \sqrt{x}$ et leur inverses:

$\lim\limits_{x \to 0} x^n = 0$	$\lim\limits_{x \to 0^+} \sqrt{x} = 0$
$\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$ $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = 0$	$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0$ $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0$

Si n est pair	**Si n est impair**
$\lim\limits_{x \to +\infty} x^n = +\infty$	$\lim\limits_{x \to +\infty} x^n = +\infty$
$\lim\limits_{x \to -\infty} x^n = +\infty$	$\lim\limits_{x \to -\infty} x^n = -\infty$
$\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x^n} = +\infty$	$\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x^n} = +\infty$
$\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{1}{x^n} = +\infty$	$\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{1}{x^n} = -\infty$

Limites des fonctions polynômiales et des fonctions rationnelles au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$:

La limite d'un polynôme au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$ est la limite de son terme de plus grand degré	**La limite d'une fonction rationnelle au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$ est la limite du quotient de ses termes de plus grand degré**

Limite des fonctions trigonométriques:

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$	$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan x}{x} = 1$	$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x^2} = \dfrac{1}{2}$

Limites des fonctions de type : $x \mapsto \sqrt{u(x)}$

$\lim\limits_{x \to x_0} u(x)$
$l \geq 0$
$+\infty$

$\Longrightarrow$

$\lim\limits_{x \to x_0} \sqrt{u(x)}$
$\sqrt{l}$
$+\infty$

Ces limites sont toujours valables lorsqu'on les traite soit à droite ou à gauche de x_0 ou bien au voisinage de $+\infty$ ou $-\infty$

Limites et ordre:

$\left.\begin{array}{l} u(x) \leq f(x) \leq v(x) \\ \lim\limits_{x \to x_0} u(x) = l \\ \lim\limits_{x \to x_0} v(x) = l \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$	$\left.\begin{array}{l} \lvert f(x) - l \rvert \leq u(x) \\ \lim\limits_{x \to x_0} u(x) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$
$\left.\begin{array}{l} f(x) \leq v(x) \\ \lim\limits_{x \to x_0} v(x) = -\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$	$\left.\begin{array}{l} u(x) \leq f(x) \\ \lim\limits_{x \to x_0} u(x) = +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$

Ces limites sont toujours valables lorsqu'on les traite soit à droite ou à gauche de x_0 ou bien au voisinage de $+\infty$ ou $-\infty$

Operations sur les limites:

Limite de la somme de deux fonctions:

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$	l			$-\infty$		$+\infty$	
$\lim\limits_{x \to x_0} g(x)$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x \to x_0} [f(x)+g(x)]$	$l+l'$	$+\infty$	$-\infty$	**F.I.**	$-\infty$	$+\infty$	**F.I.**

Limite du produit de deux fonctions:

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$	l	$l \succ 0$		$l \prec 0$		$-\infty$		$+\infty$		0
$\lim\limits_{x \to x_0} g(x)$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
$\lim\limits_{x \to x_0} [f(x)+g(x)]$	$l \times l'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	**F.I.**

Limite du quotient de deux fonctions:

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$	l		$l \succ 0$		$l \prec 0$		$-\infty$		$+\infty$		0	$\pm\infty$
$\lim\limits_{x \to x_0} g(x)$	$l' \neq 0$	$\pm\infty$	0^+	0^-	0^+	0^-	0^+	0^-	0^+	0^-	0	$\pm\infty$
$\lim\limits_{x \to x_0} \left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]$	$\dfrac{l}{l'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	**F.I.**	

Ces limites sont toujours valables lorsqu'on les traite soit à droite ou à gauche de x_0 ou bien au voisinage de $+\infty$ ou $-\infty$

Continuité

La continuité en un point:

Définition :

f continue en $x_0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

La continuité à droite – à gauche – en un point:

f continue à droite en $x_0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$

f continue à gauche en $x_0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$

f continue en $x_0 \Leftrightarrow f$ continue à droite et à gauche en x_0

La continuité sur un intervalle:

f continue sur un intervalle ouvert $]a;b[$, si f est continue en tous points de cet intervalle

f continue sur un intervalle fermé $[a;b]$, si f est continue sur l'intervalle ouvert $]a;b[$, et continue à droite en a, et à gauche en b

Operations sur les fonctions continues:

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I et k un réel quelconque

- Les fonctions : $f+g$; $f \times g$; $k \times f$ sont aussi continues sur I
- Si on a $(\forall x \in I); g(x) \neq 0$ alors les fonctions $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ sont continues sur I

Résultats:

- Tout polynôme est continu sur $\mathbb{R}$
- Toute fonction rationnelle est continue sur son domaine de définition
- La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$
- Les fonctions $x \mapsto \sin x$ et $x \mapsto \cos x$ sont continues sur $\mathbb{R}$
- La fonction $x \mapsto \tan x$ est continue sur son domaine de définition $\mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}$

La continuité d'un composé de deux fonctions:

Si f est continue sur un intervalle I et g est continue sur un intervalle J tel que $f(I) \subset J$ alors $g \circ f$ est continue sur I

Image d'un intervalle par une fonction continue:

- L'image d'un segment (intervalle fermé) par une fonction continue est un segment
- L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle

Cas particulier:

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I
Le tableau suivant montre la nature de l'intervalle $f(I)$

L'intervalle I	L'intervalle $f(I)$	
	f strictement croissante sur I	f strictement décroissante sur I
$\mathbb{R}$	$\left]\lim\limits_{x\to-\infty} f(x); \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right[$	$\left]\lim\limits_{x\to+\infty} f(x); \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)\right[$
$[a;b]$	$[f(a);f(b)]$	$[f(b);f(a)]$
$[a;b[$	$\left[f(a); \lim\limits_{x\to b^-} f(x)\right[$	$\left]\lim\limits_{x\to b^-} f(x);f(a)\right]$
$]a;b]$	$\left]\lim\limits_{x\to a^+} f(x);f(b)\right]$	$\left[f(b); \lim\limits_{x\to a^+} f(x)\right[$
$]a;b[$	$\left]\lim\limits_{x\to a^+} f(x); \lim\limits_{x\to b^-} f(x)\right[$	$\left]\lim\limits_{x\to b^-} f(x); \lim\limits_{x\to a^+} f(x)\right[$
$[a;+\infty[$	$\left[f(a); \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right[$	$\left]\lim\limits_{x\to+\infty} f(x);f(a)\right]$
$]a;+\infty[$	$\left]\lim\limits_{x\to a^+} f(x); \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right[$	$\left]\lim\limits_{x\to+\infty} f(x); \lim\limits_{x\to a^+} f(x)\right[$
$]-\infty;a]$	$\left]\lim\limits_{x\to-\infty} f(x);f(a)\right]$	$\left[f(a); \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)\right[$
$]-\infty;a[$	$\left]\lim\limits_{x\to-\infty} f(x); \lim\limits_{x\to a^-} f(x)\right[$	$\left]\lim\limits_{x\to a^-} f(x); \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)\right[$

Théorème des valeurs intermédiaires (T.V.I.):

Si f est une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$, alors pour tout réel β compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel α dans l'intervalle $[a;b]$ tel que : $f(\alpha)=\beta$

Résultats:

Si f est une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$ et $f(a)\times f(b)\prec 0$ Alors l'équation $f(x)=0$ admet au moins une solution α sur l'intervalle $[a;b]$
Si f est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle $[a;b]$ et $f(a)\times f(b)\prec 0$ Alors l'équation $f(x)=0$ possède une et une seule solution α sur l'intervalle $[a;b]$

Méthode de dichotomie:

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle $[a;b]$ et $f(a)\times f(b)\prec 0$

Et soit α l'unique solution de l'équation $f(x)=0$ sur l'intervalle $[a;b]$

Si $f(a)\times f\left(\frac{a+b}{2}\right)\prec 0$	Si $f(b)\times f\left(\frac{a+b}{2}\right)\prec 0$
Alors $a\prec\alpha\prec\frac{a+b}{2}$ et cette encadrement a une capacité qui vaut: $\frac{b-a}{2}$, on refait la même chose avec l'intervalle $\left[a;\frac{a+b}{2}\right]$ pour obtenir une meilleure précision de l'encadrement de α	Alors $\frac{a+b}{2}\prec\alpha\prec b$ et cette encadrement a une capacité qui vaut: $\frac{b-a}{2}$, on refait la même chose avec l'intervalle $\left[\frac{a+b}{2};b\right]$ pour obtenir une meilleure précision de l'encadrement de α

Remarque : et ainsi de suite jusqu'à obtention de la précision d'encadrement demandée