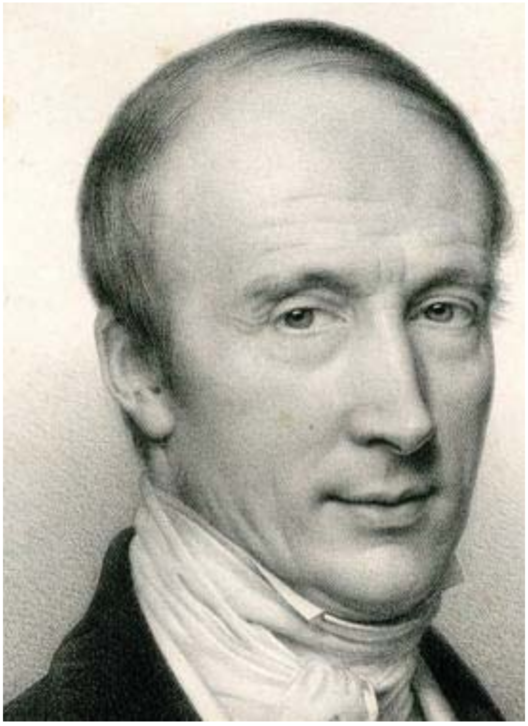
Continuité et limites

MAGAZINE DE MATHEMATIQUES

Profs : ÉQUIPE ACADEMIQUE MATHEMATIQUES

Continuité et limites



Augustin Louis, baron Cauchy, né à Paris le 21 août 1789 et mort à Sceaux (Hauts-de-Seine) le 23 mai 1857, est un mathématicien français, membre de l'Académie des sciences et professeur à l'École polytechnique. Catholique fervent, il est le fondateur de nombreuses œuvres charitables, dont l'Œuvre des Écoles d'Orient. Royaliste légitimiste, il s'exila volontairement lors de l'avènement de Louis-Philippe, après les Trois Glorieuses. Ses positions politiques et religieuses lui valurent nombre d'oppositions.

Il fut l'un des mathématiciens les plus prolifiques de tous les temps, quoique devancé par Leonhard Euler, Paul Erdős et Arthur Cayley avec près de 800 parutions et sept ouvrages ; sa recherche couvre l'ensemble des domaines mathématiques de l'époque. On lui doit notamment en analyse l'introduction des fonctions holomorphes et des critères de convergence des suites et des séries entières. Ses travaux sur les permutations furent précurseurs de la théorie des groupes. En optique, on lui doit des travaux sur la propagation des ondes électromagnétiques.

Son œuvre a fortement influencé le développement des mathématiques au XIXe siècle mais la négligence dont il fit consécutivement preuve sur les travaux d'Évariste Galois et de Niels Abel entacha son prestige. Il rejeta en effet le mémoire de Galois car « incompréhensible » et celui d'Abel sous le prétexte « encre trop pâle », alors que ces deux mathématiciens morts avant Cauchy dans des conditions misérables devaient marquer profondément les mathématiques du XXe siècle.

RESUME DU COURS

CONTINUITÉ

Soit f et g deux fonctions définie sur un intervalle ouvert I et $a \in I$.

* Si f est continue en a **si et seulement si** $\lim_{a^-} f = \lim_{a^+} f = f(a)$
* Si f est continue en a alors αf ; $|f|$ et $f^n (n \in IN)$ sont continue en a.
* Si f est continue en a et $f(a) \neq 0$ **alors** $\frac{1}{f}$ et $\frac{1}{f^n} (n \in IN)$ sont continues en a.
* Si f est positive sur I et f est continue en a **alors** $\sqrt{f}$ est continue en a.

Conséquences

* Toute fonction polynôme est continue sur IR.
* Toute fonction rationnelle est continue sur tout intervalle de leur ensemble de définition.
* $x \mapsto \cos x$ et $x \mapsto \sin x$ sont continues sur IR.
* Les fonctions obtenues par opérations sur les fonctions usuelles **(somme, produit, quotient, composé)** sont continues sur tout intervalle de leur ensemble de définition.

Prolongement par continuité :

Si f est définie sur I ; sauf peut-être en x_0 de I, et si $\lim_{x_0} f = \mathscr{L}$ ($\mathscr{L}$ finie), on dit que g est un prolongement par continuité de f en x_0 **si et seulement si :** $g(x) = \begin{cases} f(x) & ; \text{ si } x \neq x_0 \\ \mathscr{L} & ; \text{ si } x = x_0 \end{cases}$

Branches Infinies :

interprétation mathématique	interprétation graphique
$\lim\limits_{a^+} f = +\infty$ **ou** $\lim\limits_{a^+} f = -\infty$ $\lim\limits_{a^-} f = +\infty$ **ou** $\lim\limits_{a^-} f = -\infty$	**D :(x = a)** asymptote verticale
$\lim\limits_{+\infty} f = \mathscr{L}$ **ou** $\lim\limits_{-\infty} f = \mathscr{L}$	**D : (y = $\mathscr{L}$)** asymptote horizontale
$\lim\limits_{+\infty}(f(x)-(ax+b))=0$ **ou** $\lim\limits_{-\infty}(f(x)-(ax+b))=0$	**D :(y = ax+b)** asymptote oblique
Si $\lim\limits_{\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\infty$	Branche parabolique de direction $(O\vec{j})$
Si $\lim\limits_{\pm\infty} f(x)=\pm\infty$ et $\lim\limits_{\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=0$	Branche parabolique de direction $(O\vec{i})$

$$\lim_{\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=a \quad (a\in IR^*)$$

et si $\lim\limits_{\pm\infty} f(x)-ax=b \quad (b\in IR)$
alors
$y=ax+b$ asymptote oblique
oblique au voisinage de $\pm\infty$.

et si $\lim\limits_{\pm\infty} f(x)-ax=\pm\infty$
alors
la courbe de f admet une branche parabolique de direction $y=ax$

Axe de symétrie :

La droite $\Delta : x = a$;$(a\in IR)$ est un axe de symétrie pour $(\mathscr{C}_f)$ si pour tout x de D_f.

$$\begin{cases}(2a-x)\in D_f\\ f(2a-x)=f(x)\end{cases}$$

Continuité d'une fonction composée :

Si U est continue en a
et V est continue en U(a) } alors V o U est continue en a.

Théorème :

Soit **a**, **b** et **c** finis ou infinis. **Si** $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to a} U(x) = \mathbf{b} \\ \text{et} \\ \lim\limits_{x\to b} V(x) = \mathbf{c} \end{array}\right\}$ alors $\lim\limits_{x\to a} V \circ U(x) = \mathbf{c}$

Théorème des valeurs intermédiaires :

Soit f une fonction continue sur un intervalle I ,a et b $\in I$ tels que $a < b$ pour tout réel k compris entre f(a) et f(b) l'équation f(x) = k possède **au moins une solution** dans $[a,b]$ <u>**en particulier**</u> , si $f(a) \times f(b) < 0$ alors l'équation f(x) = 0 admet au moins une solution dans $]a,b[$, Si de plus **f est strictement monotone** la solution **est unique** dans $[a,b]$

Limites et ordres :

✱ **Si** $\left.\begin{array}{l} U(x) \le V(x) \text{ pour } x \neq a \\ \lim\limits_{a} U = \mathscr{L} \\ \lim\limits_{a} V = \mathscr{L}' \end{array}\right\}$ alors $\mathscr{L} \le \mathscr{L}'$

✱ **Si** $\left.\begin{array}{l} U(x) \le f(x) \le V(x) \text{ pour } x \neq a \\ \lim\limits_{a} U = \lim\limits_{a} V = \mathscr{L} \end{array}\right\}$ alors

$\lim\limits_{a} f = \mathscr{L}$

✱ **Si** $\left.\begin{array}{l} f(x) \ge U(x) \text{ pour } x \neq a \\ \text{et } \lim\limits_{a} U = +\infty \end{array}\right\}$ alors $\lim\limits_{a} f = +\infty$

$U(x) \le U(x)$ pour $x \neq a$

CASIO fx-570 ES ou fx-570 ES PLUS

EXPRESSION d'une fonction

1°) Soit $f(x) = -2x+1-\dfrac{2}{x-3}$ **(mode COMP)+(MthIO)**

Pour la valeur de x , utiliser la touche  et la touche .

2°) Soit $f(x) = \sqrt{x^2+2x-1}+x+1$ **(mode COMP)+(MthIO)**

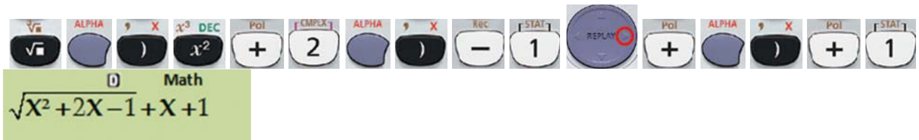
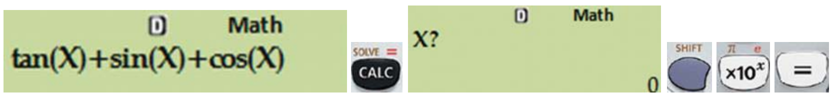


Image d'un nombre réel par une fonction

Soit $f(x) = tgx + \sin x + \cos x$

$f(\pi) = -1$ 



Limites d'une fonction

Pour avoir une idée de la valeur de $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$,donner à x des valeurs proches de x_0 et calculer f(x).

❑ Limite en un point

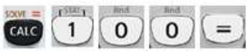
Exemple : $\lim\limits_{x \to -1^+} \dfrac{-3x}{x^2-1}$ (Entrer $\dfrac{-3x}{x^2-1}$) 

x	f(X) ≈	Appuyez sur ces touches :
-0.9	-14.21052632	
-0.99	-149.2462312	
-0.999	-1499.249625	

ce qui confirme les valeurs (**et surtout les signes!**) que nous avons trouvées $\lim\limits_{x \to -1^+} \dfrac{-3x}{x^2-1} = -\infty$

❑Limite à l'infini

Exemple : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\cos x}{x^2-1}$ (Entrer $\dfrac{\cos x}{x^2-1}$) 

x	f(X)≈	Appuyez sur ces touches :
10	-0.00847546999	
100	0.00008624051	
1000	0.00000056237	

Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\cos x}{x^2-1} = 0 \ (0^+)$