2020

Resumé Analyse

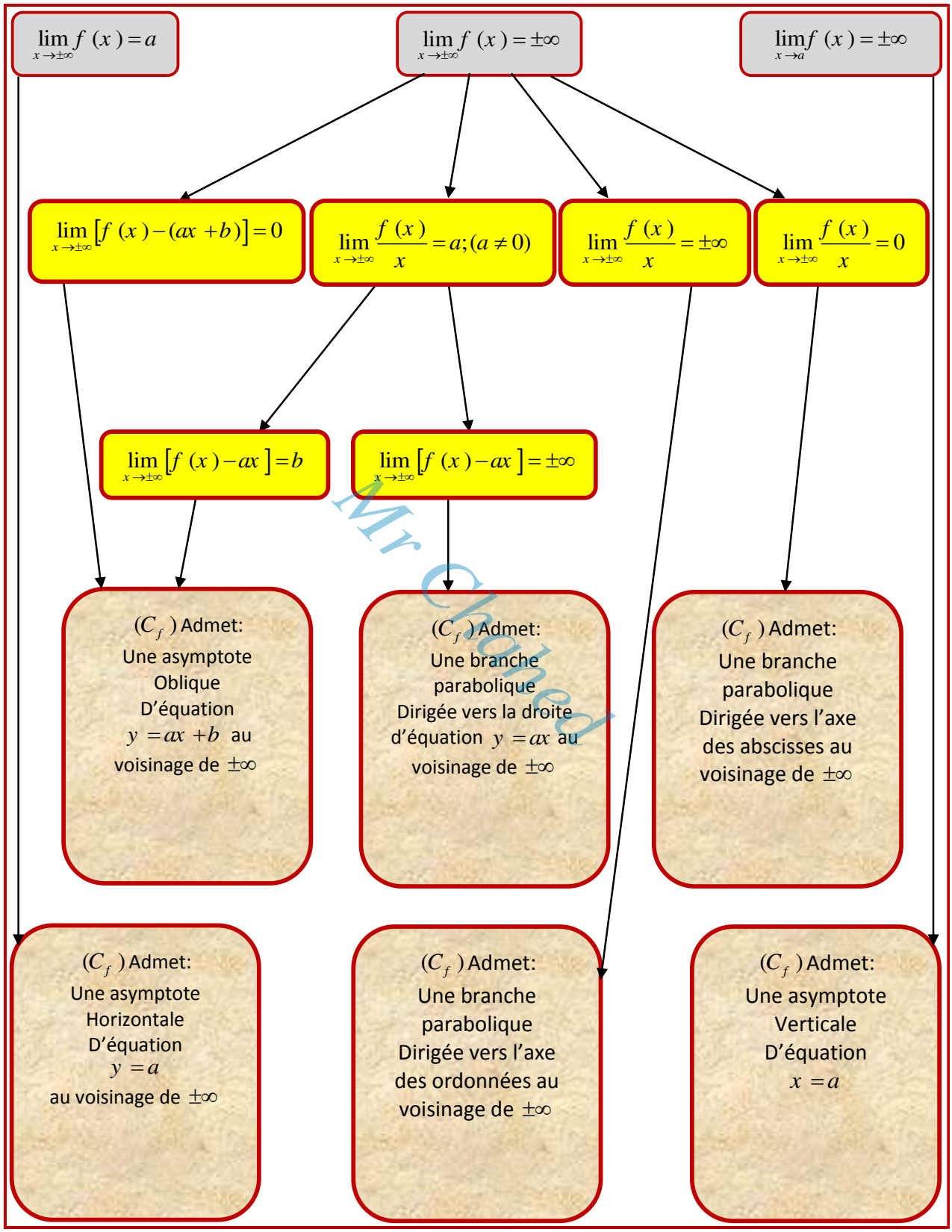
4éme Math & Sc exp



Mr Chahed

موقع مراجعة باكالوريا
BAC.MOURAJAA.COM

Les branches infinies



Mr Chahed

موقع مراجعة باكالوريا
BAC.MOURAJAA.COM
bac Math

Dérivabilité

Dérivabilité en un point:

On dit qu'une fonction f est dérivable en un point x_0 si la limite : $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ est finie

Cette limite est nommée le nombre dérivé de la fonction f en x_0 et on écrit : $f'(x_0)$

Equation de la tangente à la courbe d'une fonction – la fonction affine tangente à la courbe d'une fonction:

Soit f une fonction dérivable en x_0

- L'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse x_0 est : $y = f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$
- La fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par : $u(x) = f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$ est la fonction affine tangente à la courbe de la fonction f au point d'abscisse x_0 et c'est une approche de la fonction f au voisinage de x_0

Dérivabilité à droite – à gauche, en un point:

On dit que f est dérivable à droite en x_0 si la limite : $\lim\limits_{x \to x_0^+} \dfrac{f(x)-f'(x_0)}{x-x_0}$ est finie

Cette limite est nommée le nombre dérivé de la fonction f à droite en x_0 et on écrit : $f'_d(x_0)$

On dit que f est dérivable à gauche en x_0 si la limite : $\lim\limits_{x \to x_0^-} \dfrac{f(x)-f'(x_0)}{x-x_0}$ est finie

Cette limite est nommée le nombre dérivé de la fonction f à gauche en x_0 et on écrit : $f'_g(x_0)$

On dit qu'une fonction f est dérivable en un point x_0 si elle est dérivable à droite et à gauche en x_0, et $f'_d(x_0) = f'_g(x_0)$

La dérivabilité et la continuité:

Si une fonction f est dérivable en x_0, alors f est continue en x_0

Tableaux des dérivées de quelques fonctions usuelles:

$f(x)$	$f'(x)$	
k	0	
x	1	$(x \in \mathbb{R})$
$\dfrac{1}{x}$	$\dfrac{-1}{x^2}$	
x^r	rx^{r-1}	$\left(r \in \mathbb{Q}^* - \{1\}\right)$
$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	

Mr Chaled

موقع مراجعة باكالوريا
BAC.MOURAJAA.COM

bac Math

Opérations sur les fonctions dérivables:

$(u+v)'=u'+v'$	$(u-v)'=u'-v'$	$(\mathrm{k}\in\mathbb{R});(\mathrm{k}u)'=ku'$
$(uv)'=u'v+uv'$	$(u^n)'=nu'u^{n-1}$	
$\left(\frac{1}{v}\right)'=\frac{-v'}{v^2}$	$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$	

La dérivée du composé de deux fonctions – la dérivée de la fonction racine carré:

$(u\circ v)'=v'\times[u'\circ v]$	$\left(\sqrt{u}\right)'=\frac{u'}{2\sqrt{u}}$

La dérivation et les variations d'une fonction:

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I

$\forall x\in I; f'(x)\geq 0 \left(f'(x)\succ 0\right) \Leftrightarrow$ f est croissante (strictement croissante) sur l'intervalle I

$\forall x\in I; f'(x)=0 \Leftrightarrow$ f est constante sur l'intervalle I

$\forall x\in I; f'(x)\leq 0 \left(f'(x)\prec 0\right) \Leftrightarrow$ f est décroissante (strictement décroissante) sur l'intervalle I

La dérivation et l'interprétation géométrique:

La limite	Déduction	Interprétation géométrique la courbe (C_f) admet :
$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f'(x_0)}{x-x_0}=a;(a\neq 0)$	f est dérivable en x_0	Une tangente au point $A(x_0;f(x_0))$ de coefficient directeur a
$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f'(x_0)}{x-x_0}=0$		Une tangente horizontale au point $A(x_0;f(x_0))$
$\lim\limits_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f'(x_0)}{x-x_0}=a;(a\neq 0)$	f est dérivable à droite en x_0	Une demi-tangente à droite du point $A(x_0;f(x_0))$
$\lim\limits_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f'(x_0)}{x-x_0}=0$		Une demi-tangente horizontale au point $A(x_0;f(x_0))$
$\lim\limits_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f'(x_0)}{x-x_0}=-\infty$	f n'est pas dérivable à droite en x_0	Une demi-tangente verticale à droite au point $A(x_0;f(x_0))$ dirigé vers le bas
$\lim\limits_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f'(x_0)}{x-x_0}=+\infty$		Une demi-tangente verticale à droite au point $A(x_0;f(x_0))$ dirigé vers le haut
$\lim\limits_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f'(x_0)}{x-x_0}=a;(a\neq 0)$	f est dérivable à gauche en x_0	Une demi-tangente à gauche du point $A(x_0;f(x_0))$
$\lim\limits_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f'(x_0)}{x-x_0}=0$		Une demi-tangente horizontale au point $A(x_0;f(x_0))$
$\lim\limits_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f'(x_0)}{x-x_0}=-\infty$	f n'est pas dérivable à gauche en x_0	Une demi-tangente verticale à gauche au point $A(x_0;f(x_0))$ dirigé vers le haut
$\lim\limits_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f'(x_0)}{x-x_0}=+\infty$		Une demi-tangente verticale à gauche au point $A(x_0;f(x_0))$ dirigé vers le bas

Mr Chahed

موقع مراجعة باكالوريا
BAC.MOURAJAA.COM
bac Math

Théorème de Rolle (a < b)

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ et telle que : $f(a) = f(b)$. Alors il existe un réel $c \in]a, b[$ tel que : $f'(c) = 0$.

Théorème des accroissements finis (a < b)

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, [$. Alors il existe un réel $c \in]a, b[$ tel que :

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Inégalité des accroissements finis (a < b)

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, [$ et pour tout $\forall x \in]a, b[$, $m \leq f'(x) \leq M$.
Alors $m(b-a) \leq f(a) - f(b) \leq M(b-a)$

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Si f est dérivable sur I et $(\forall x \in I)(|f'(x)| \leq k$

(où $k > 0$) .Alors $(\forall (x, y) \in I^2)(|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|)$

Axe de symétrie:

La droite d'équation cartésienne $x = a$ est un axe de symétrie de la courbe $(\mathcal{C}_f)$ si les deux Conditions suivantes sont réalisées :

- $\forall x \in D_f$ on a $(2a - x) \in D_f$
- $f(2a - x) = f(x)$

Cas particulier : si $a = 0$; f est une fonction paire

Centre de symétrie:

Le point $I(a, b)$ est un centre de symétrie de la courbe $(\mathcal{C}_f)$ si les deux Conditions suivantes sont réalisées :

- $\forall x \in D_f$ on a $(2a - x) \in D_f$
- $f(2a - x) + f(x) = 2b$

Cas particulier : si $a = b = 0$; f est une fonction impaire

Point d'inflexion

Soit f fonction deux fois dérivable sur un intervalle I
Si f'' s'annule en a en changeant de signe, alors $(\mathcal{C}_f)$ admet un point d'inflexion d'abscisse a
Si f' s'annule en a sans changer de signe, alors $(\mathcal{C}_f)$ admet un point d'inflexion d'abscisse a

Mr Chahed

موقع مراجعة باكالوريا
BAC.MOURAJAA.COM
bac Math

La fonction réciproque

Propriété:

Si f est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I
Alors f admet une fonction réciproque définie sur l'intervalle $f(I)$ vers l'intervalle I

Résultats:

- $\begin{cases} f(x)=y \\ x \in I \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f^{-1}(y)=x \\ y \in f(I) \end{cases}$
- $(\forall x \in I);\left(f^{-1} \circ \mathrm{f}\right)(x)=f^{-1}(\mathrm{f}(\mathrm{x}))=x$
- $(\forall y \in f(I));\left(\mathrm{f} \circ f^{-1}\right)(\mathrm{y})=\mathrm{f}\left(f^{-1}(\mathrm{x})\right)=y$

Détermination de la formule de la fonction réciproque:

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I
Soit x un élément de l'intervalle $f(I)$ et y un élément de l'intervalle I
En utilisant l'équivalence suivante : $f^{-1}(x)=y \Leftrightarrow x=f(y)$ et en cherchant y en fonction de x on trouve ainsi la formule de $f^{-1}(x)$ pour tout x de $f(I)$

Continuité de la fonction réciproque:

Si f est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I
Alors la fonction réciproque f^{-1} est continue et strictement monotone sur l'intervalle $f(I)$, de même sens de monotonie que f

Dérivabilité de la fonction réciproque:

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I
Soit x_0 un élément de l'intervalle $f(I)$ et $y_0=f(x_0)$
Si f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) \neq 0$
Alors la fonction réciproque f^{-1} est dérivable en y_0 et on a : $\left(f^{-1}\right)'(y_0)=\dfrac{1}{f'(x_0)}=\dfrac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I
Si f est dérivable sur l'intervalle I et sa fonction dérivée f' ne s'annule pas sur cet intervalle I
Alors la fonction réciproque f^{-1} est dérivable sur l'intervalle $f(I)$
Et on a : $(\forall x \in f(I));\left(f^{-1}\right)'(\mathrm{x})=\dfrac{1}{f'\left(\mathrm{f}^{-1}(\mathrm{x})\right)}$

Monotonie de la fonction réciproque:

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I
La fonction réciproque f^{-1} est aussi strictement monotone et de même monotonie que la fonction f

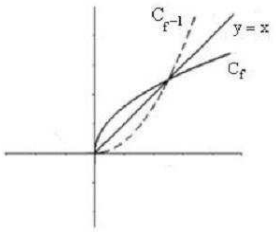
Mr Chaied

موقع مراجعة باكالوريا
BAC.MOURAJAA.COM
bac Math

La représentation graphique de la fonction réciproque:

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I

Les représentations graphiques des fonctions f et f^{-1} dans un repère orthonormé sont symétrique par rapport à la première bissectrice (la droite d'équation : $y = x$) du repère.



Remarques importantes:

La courbe (C_f)		La courbe $(C_{f^{-1}})$
$A(a;b) \in (C_f)$		$A'(b;a) \in (C_{f^{-1}})$
Admet une asymptote verticale d'équation : $x = a$		Admet une asymptote horizontale d'équation : $y = a$
Admet une asymptote horizontale d'équation : $y = b$		Admet une asymptote verticale d'équation : $x = b$
Admet une asymptote oblique d'équation : $y = ax + b$		Admet une asymptote oblique d'équation : $y = \frac{1}{a}x + \frac{b}{a}$ (qu'on détermine à partir de la relation $x = ay + b$)
Admet une tangente (ou une demi-tangente) verticale		Admet une tangente (ou une demi-tangente) horizontale
Admet une tangente (ou une demi-tangente) horizontale		Admet une tangente (ou une demi-tangente) verticale

Mr Chaher

موقع مراجعة باكالوريا
BAC.MOURAJAA.COM
bac Math

Les fonctions primitives

Les fonctions primitives d'une fonction continue sur un intervalle:

Définition:

Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I
On dit que F est une fonction primitive de f sur l'intervalle I
Si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

- F est dérivable sur l'intervalle I
- $(\forall x \in I); F'(x) = f(x)$

Propriétés:

Toute fonction continue sur un intervalle admet une primitive sur cet intervalle

Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I
Si F est une fonction primitive de f sur l'intervalle I, alors toutes les fonctions primitives de f sont définies sur l'intervalle I comme suit :
$x \mapsto F(x) + k \;\; ; \;\; (k \in \mathbb{R})$

Soit f une fonction numérique qui admet une fonction primitive sur un intervalle I
Et soit x_0 un élément de I et y_0 un réel quelconque de $\mathbb{R}$
Il existe une unique fonction primitive F de f sur l'intervalle I qui vérifie la condition initiale:
$F(x_0) = y_0$

Les primitives de $f+g$ et kf : $(k \in \mathbb{R})$

Propriété:

Soit f et g deux fonctions numériques définies sur un intervalle I et k un réel
Si F et G sont deux primitives de f et g successivement sur l'intervalle I alors :

- $F+G$ est une fonction primitive de $f+g$ sur l'intervalle I
- kF est une fonction primitive de kf sur l'intervalle I

My Channel

موقع مراجعة باكالوريا
BAC.MOURAJAA.COM
bac Math

Tableau des primitives des fonctions usuelles

f	intervalle	F
$x \mapsto a$	R	$x \mapsto ax + k\ ,k \in \mathbb{R}$
$x \mapsto x^n\ , n \in \mathbb{N}^*$	R	$x \mapsto \frac{1}{n+1}x^{n+1} + k$
$x \mapsto \frac{1}{x^n}\ , n \in \mathbb{N}^* \backslash \{1\}$	$]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$	$x \mapsto -\frac{1}{n-1}x^{n-1} + k$
$x \mapsto \frac{1}{x}$	$]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$	$x \mapsto \ln(\lvert x \rvert) + k$
$x \mapsto \sqrt{x}$	$[0, +\infty[$	$x \mapsto \frac{2}{3}x\sqrt{x} + k = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + k$
$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$	$]0, +\infty[$	$x \mapsto 2\sqrt{x} + k$
$x \mapsto \frac{1}{\sqrt[n]{x}}\ , n \in \mathbb{N}^* \backslash \{1\}$	$]0, +\infty[$	$x \mapsto n\sqrt[n]{x} + k$
$x \mapsto cos(ax + b)\ , a \neq 0$	R	$x \mapsto \frac{1}{a}\sin(ax + b) + k$
$x \mapsto sin(ax + b)\ , a \neq 0$	R	$x \mapsto -\frac{1}{a}cos(ax + b) + k$
$x \mapsto 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$	$]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$	$x \mapsto \tan(x) + k$
$x \mapsto e^x$	R	$x \mapsto e^x + k$
$x \mapsto \ln(x)$	$]0, +\infty[$	$x \mapsto x\ln(x) - x + k$

Mr Chaled

Utilisation des formules de dérivée pour calculer des primitives

f	F
$u'u^n\ , n \in \mathbb{N}^*$	$\frac{1}{n+1}u^{n+1} + k$
$\frac{u'}{u^n}, n \in \mathbb{N}^* \backslash \{1\}$	$-\frac{1}{n-1}\frac{1}{u^{n-1}} + k$
$\frac{u'}{u}$	$\ln(\lvert u \rvert) + k$
$u'\sqrt{u}$	$\frac{2}{3}u\sqrt{u} + k$
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u} + k$
$u'e^u$	$e^u + k$
$u'v'(u)$	$v \circ u + k$

موقع مراجعة باكالوريا
BAC.MOURAJAA.COM
bac Math

L'intégrale

Intégral d'une fonction continue sur un segment:

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$ et F une primitive de f sur $[a;b]$

L'intégral de la fonction f entre a et b est le nombre réel :

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

propriétés:

$\int_a^a f(x)dx = 0$	$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

La linéarité:

$(k \in \mathbb{R})$; $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$	$\int_a^b [f(x)+g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$

Relation de Chasles:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Intégral et comparaison:

Si : $\forall x \in [a;b]$ on a $f(x) \geq 0$	Si : $\forall x \in [a;b]$ on a $f(x) \geq g(x)$
Alors : $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$	Alors : $\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx$

La valeur moyenne:

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$

La valeur moyenne de la fonction f sur le intervalle $[a;b]$ est le réel défini par : $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$

Intégration par partie:

Soit f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle $[a;b]$ à condition que f' et g' soient continues sur l'intervalle $[a;b]$

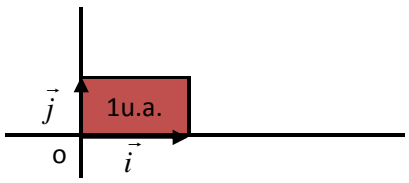
$$\int_a^b [f'(x)\times g(x)]dx = [f(x)\times g(x)]_a^b - \int_a^b [f(x)\times g'(x)]dx$$

Calcul de l'aire algébrique d'un domaine plan:

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

L'unité de surface (u.a.): est la surface d'un rectangle défini par le point O (origine du repère) et les deux vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$

$1u.a. = \|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\|$



Mr Chahed

موقع مراجعة باكالوريا
BAC.MOURAJAA.COM

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$

L'aire algébrique délimitée par la courbe (C_f), l'axe des abscisses, et les droites d'équation $x=a$ et $x=b$ est représentée par :

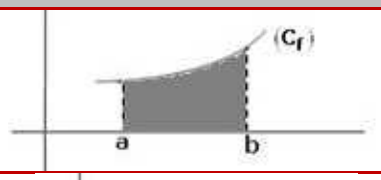
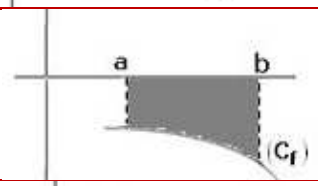
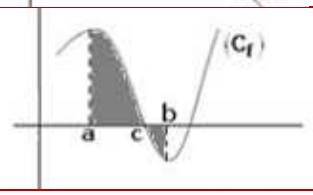
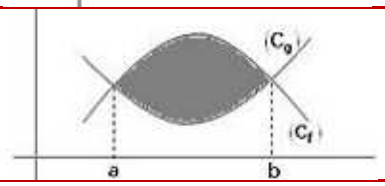
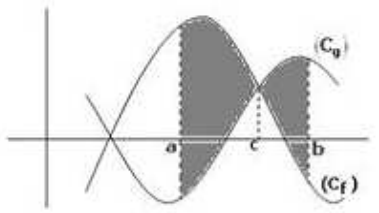
$$\left(\int_a^b |f(x)|dx\right) u.a.$$

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a;b]$

L'are algébrique comprise entre la courbe (C_f), la courbe (C_g), et les droites d'équation $x=a$ et $x=b$ est représentée par :

$$\left(\int_a^b |f(x)-g(x)|dx\right) u.a.$$

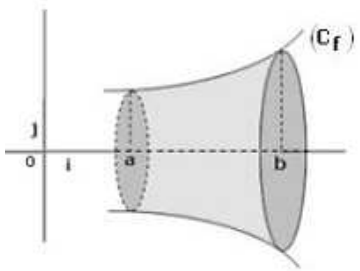
Cas particulier:

La représentation	Remarques	Aire algébrique du domaine plan gris dans la représentation
	f positive sur $[a;b]$	$\left(\int_a^b f(x)dx\right) u.a.$
	f négative sur $[a;b]$	$\left(\int_a^b (-f(x))dx\right) u.a.$
	• f positive sur $[a;c]$ • f négative sur $[c;b]$	$\left(\int_a^c f(x)dx + \int_c^b (-f(x))dx\right) u.a.$
	(C_f) se situe au-dessus de (C_g) sur $[a;b]$	$\left(\int_a^b f(x)-g(x)dx\right) u.a.$
	• (C_f) se situe au-dessus de (C_g) sur $[a;c]$ • (C_f) se situe au-dessous de (C_g) sur $[c;b]$	$\left(\int_a^c (f(x)-g(x))dx + \int_c^b (g(x)-f(x))dx\right) u.a.$

Calcul d'un volume:

Le volume du solide engendré par un tour complet, de la courbe (C_f), autour de l'axe des abscisses dans un intervalle $[a;b]$ est :

$$V = \left[\int_a^b \pi (f(x))^2 dx\right] u.a.$$



M.Chahed

موقع مراجعة باكالوريا
BAC.MOURAJAA.COM
bac Math

Fonction définie par intégrale

Théorème

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et a un réel de I alors la fonction F définie sur I par $F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{dt}$ est dérivable sur I et $\forall x \in I$ on a $F'(x) = f(x)$

Conséquence

F est la primitive de f sur I qui s'annule en a

Théorème

Soit f une fonction continue sur un intervalle J , u une fonction dérivable sur un intervalle I ,

a un réel de I et $u(I) \subset J$ alors la fonction définie sur I par $F(x) = \int_a^{u(x)} f(t)\,\mathrm{dt}$ est dérivable sur I

Et pour tout $x \in I$ on a $F'(x) = u'(x)f\big(u(x)\big)$

Mr Chahed

Remarque

Pour étudier la fonction F définie sur un intervalle I par $F(x) = \int_{v(x)}^{u(x)} f(t)\,\mathrm{dt}$

On intercale un réel a de l'intervalle I

$F(x) = \int_{v(x)}^{a} f(t)\,\mathrm{dt} + \int_a^{u(x)} f(t)\,\mathrm{dt} = \int_a^{u(x)} f(t)\,\mathrm{dt} - \int_a^{v(x)} f(t)\,\mathrm{dt} = F_1(x) - F_2(x)$

Puis on utilise le théorème précisent pour prouver que les fonctions F_1 et F_2 sont dérivables sur I

Ainsi F est dérivables sur I et $\forall x \in I$ on a $F'(x) = F_1'(x) - F_2'(x)$

موقع مراجعة باكالوريا
BAC.MOURAJAA.COM
bac Math

Les fonctions logarithmiques

La fonction logarithme népérien:

Définition :

La fonction logarithme népérien, notée $\ln$ (ou $\log_e$), est la primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ qui s'annule en 1

Déductions et propriétés:

$\ln e = 1$	$\ln 1 = 0$	$\forall x \in]0;+\infty[$ et $\forall y \in]0;+\infty[$ $\ln xy = \ln x + \ln y$ $\ln x^r = r \ln x \ ; (r \in \mathbb{Q})$ $\ln \frac{1}{y} = -\ln y$ $\ln \frac{x}{y} = \ln x - \ln y$
$\forall x \in]0;+\infty[$ et $\forall y \in]0;+\infty[$ • $\ln x = \ln y \Leftrightarrow x = y$ • $\ln x \succ \ln y \Leftrightarrow x \succ y$		
$\forall x \in]0;+\infty[$ et $\forall y \in \mathbb{R}$ • $\ln x = y \Leftrightarrow x = e^y$		

Si n est pair, alors $\left(\forall x \in \mathbb{R}^*\right); \ln x^n = n \ln|x|$

Le Domaine de définition:

La fonction f est définie comme suit :	Son domaine de définition est :
$f(x) = \ln x$	$D_f =]0;+\infty[$
$f(x) = \ln[u(x)]$	$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x \in D_u$ et $u(x) \succ 0\}$

Les limites:

Limites principales		Déductions
$\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$		$\lim\limits_{x \to x_0} u(x) = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} \ln[u(x)] = +\infty$
$\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$		$\lim\limits_{x \to x_0} u(x) = 0^+ \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} \ln[u(x)] = -\infty$
$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$	$(n \in \mathbb{N}^*)$	$\lim\limits_{x \to x_0} u(x) = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} \frac{\ln[u(x)]}{[u(x)]^n} = 0$
$\lim\limits_{x \to 0^+} x^n \ln x = 0$	$(n \in \mathbb{N}^*)$	$\lim\limits_{x \to x_0} u(x) = 0^+ \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} [u(x)]^n \ln[u(x)] = 0$
$\lim\limits_{x \to 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$		$\lim\limits_{x \to x_0} u(x) = 1 \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} \frac{\ln[u(x)]}{u(x)-1} = 1$
$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$		$\lim\limits_{x \to x_0} u(x) = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} \frac{\ln[u(x)+1]}{u(x)} = 1$

Ces limites sont toujours valables lorsqu'on les traite soit a droite ou a gauche de x_0 ou bien au voisinage de $+\infty$ ou $-\infty$

Mr.Chahed

موقع مراجعة باكالوريا
BAC.MOURAJAA.COM
bac Math

La continuité:

La fonction $x \mapsto \ln x$ est continue sur l'intervalle $]0;+\infty[$

Si u est strictement positive et continue sur un intervalle I alors la fonction $x \mapsto \ln[u(x)]$ est continue sur l'intervalle I

La dérivabilité:

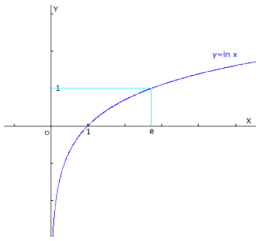
La fonction $x \mapsto \ln x$ est dérivable sur l'intervalle $]0;+\infty[$ et on a :

$$\forall x \in]0;+\infty[\; ; \; (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

Si u est strictement positive et dérivable sur un intervalle I alors la fonction $x \mapsto \ln[u(x)]$ est dérivable sur l'intervalle I et on a :

$$\forall x \in I \; ; \; (\ln[u(x)])' = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

La représentation graphique:



signe de $\ln$ **:**

x	0		1	$+\infty$
$\ln x$	$-$	$\|$ 0 $\|$		$+$

La fonction logarithme de base a **avec** $a \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$ **:**

Définition:

La fonction logarithme de base a est la fonction notée : $\log_a$

tel que : $\forall x \in]0;+\infty[\; ; \; \log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$

Cas particulier: la fonction $\log_{10}$ est la fonction logarithme décimal et on la note $\log$

Déductions et propriétés:

$$\log_a 1 = 0$$
$$\log_a a = 1$$

$\forall x \in]0;+\infty[$ et $\forall r \in \mathbb{Q}$

$$\log_a x = r \Leftrightarrow x = a^r$$

$\forall x \in]0;+\infty[$ et $\forall y \in]0;+\infty[$ et $r \in \mathbb{Q}$

$$\log_a xy = \log_a x + \log_a y$$
$$\log_a x^r = r \log_a x$$
$$\log_a \left(\frac{1}{x}\right) = -\log_a x$$
$$\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$$

Limites et inéquations:

$a \succ 1$	$0 \prec a \prec 1$
$\log_a x \succ \log_a y \Leftrightarrow x \succ y$	$\log_a x \succ \log_a y \Leftrightarrow x \prec y$
$\lim\limits_{x \to +\infty} \log_a x = +\infty$	$\lim\limits_{x \to +\infty} \log_a x = -\infty$
$\lim\limits_{x \to 0^+} \log_a x = -\infty$	$\lim\limits_{x \to 0^+} \log_a x = +\infty$

La dérivée:

$$\forall x \in]0;+\infty[\; ; \; (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$$

Mr Chahed

موقع مراجعة باكالوريا
BAC.MOURAJAA.COM
bac Math

Les fonctions exponentielles

La fonction exponentielle népérienne:

Définition :

La fonction exponentielle népérien, notée e^x (ou $\exp(x)$), est la fonction réciproque de la fonction $x \mapsto \ln x$, et qui est définie sur $\mathbb{R}$

Déductions et propriétés:

$\forall x \in \mathbb{R} \quad e^x \succ 0$ $\ln e^x = x$	$\forall x \in \mathbb{R}$ et $\forall y \in \mathbb{R}$ $e^x \times e^y = e^{x+y}$ $(e^x)^r = e^{rx}$; $(r \in \mathbb{Q})$ $\frac{1}{e^x} = e^{-x}$ $\frac{e^x}{e^y} = e^{x-y}$
$\forall x \in]0;+\infty[\quad e^{\ln(x)} = x$	
$\forall x \in \mathbb{R}$ et $\forall y \in \mathbb{R}$ • $e^x = e^y \Leftrightarrow x = y$ • $e^x \succ e^y \Leftrightarrow x \succ y$	
$\forall x \in \mathbb{R}$ et $\forall y \in]0;+\infty[$ • $e^x = y \Leftrightarrow x = \ln y$	

Si n est pair, alors $(\forall x \in \mathbb{R}^*); \ln x^n = n \ln|x|$

Le Domaine de définition:

La fonction f est définie comme suit :	Son domaine de définition est :
$f(x) = e^x$	$D_f = \mathbb{R}$
$f(x) = e^{u(x)}$	$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x \in D_u\}$

Les limites:

Limites principales		Déductions
$\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$		$\lim\limits_{x \to x_0} u(x) = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} e^{u(x)} = +\infty$
$\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$		$\lim\limits_{x \to x_0} u(x) = -\infty \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} e^{u(x)} = 0$
$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$	$(n \in \mathbb{N}^*)$	$\lim\limits_{x \to x_0} u(x) = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} \frac{e^{u(x)}}{[u(x)]^n} = +\infty$
$\lim\limits_{x \to -\infty} x^n e^x = 0$	$(n \in \mathbb{N}^*)$	$\lim\limits_{x \to x_0} u(x) = -\infty \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} [u(x)]^n e^{u(x)} = 0$
$\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$		$\lim\limits_{x \to x_0} u(x) = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} \frac{e^{u(x)} - 1}{u(x)} = 1$

Ces limites sont toujours valables lorsqu'on les traite soit a droite ou a gauche de x_0 ou bien au voisinage de $+\infty$ ou $-\infty$

Mr Chahed

موقع مراجعة باكالوريا
BAC.MOURAJAA.COM
bac Math

La continuité:

La fonction $x \mapsto e^x$ est continue sur l'intervalle $\mathbb{R}$

Si u est continue sur un intervalle I alors la fonction $x \mapsto e^{u(x)}$ est continue sur l'intervalle I

La dérivabilité:

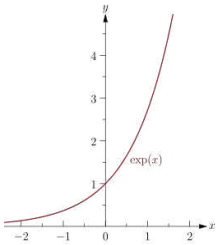
La fonction $x \mapsto e^x$ est dérivable sur l'intervalle $\mathbb{R}$ et on a :

$\forall x \in \mathbb{R} \; ; \left(e^x\right)' = e^x$

Si u est dérivable sur un intervalle I alors la fonction $x \mapsto e^{u(x)}$ est dérivable sur l'intervalle I et on a :

$\forall x \in I \; ; \left(\mathrm{e}^{\mathrm{u}(x)}\right)' = u'(x) \times e^{u(x)}$

La représentation graphique:



La fonction exponentielle de base a avec $a \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$:

Définition:

La fonction exponentielle de base **a**, notée : a^x , est la réciproque de $\log_a$

Déductions et propriétés:

$\forall x \in \mathbb{R} \quad a^x = e^{x \ln a}$ $\log_a(a^x) = x$	$\forall x \in \mathbb{R}$ et $\forall y \in \mathbb{R}$ et $r \in \mathbb{Q}$ $a^x \times a^y = a^{x+y}$ $\left(a^x\right)^r = a^{rx}$ $\frac{1}{a^x} = a^{-x}$ $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$
$\forall x \in]0;+\infty[\; a^{\log_a x} = x$	
$a^x = a^x \Leftrightarrow x = y$	
$\forall x \in \mathbb{R} \; \forall y \in]0;+\infty[$ $a^x = y \Leftrightarrow x = \log_a y$	

Limites et inéquations:

$a \succ 1$	$0 \prec a \prec 1$
$a^x \succ a^y \Leftrightarrow x \succ y$	$a^x \succ a^y \Leftrightarrow x \prec y$
$\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = +\infty$ $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = 0$	$\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = 0$ $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = +\infty$
$\lim\limits_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$	

La dérivée:

$\forall x \in]0;+\infty[\; ; \left(\log_a x\right)' = \frac{1}{x \ln a}$

Mr Chnedar

موقع مراجعة باكالوريا
BAC.MOURAJAA.COM
bac Math