Intégrales

Improvisation de cours

Quatrième année enseignement secondaire

Improvisation : BEN FREDJ *sofiane*

sofiane.benfradj@planet.tn

Table des matières

1

Intégrales

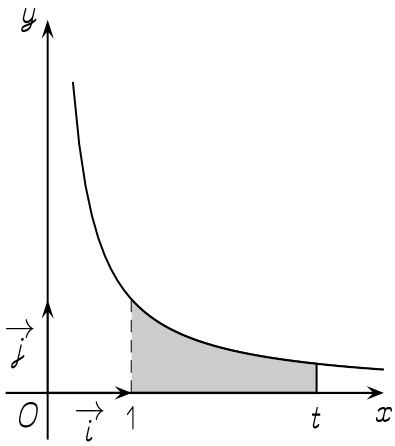
1.1 Primitives

1.1.1 Primitive de f sur un intervalle I

Activité 1.1.1.

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f définie sur l'intervalle $]0, +\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{1}{x}$

Pour tout réel $t > 0$, on désigne par $S(t)$ l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = t$



1/ Soit h un réel tel que $0 < h < 1$ et soit a un réel tel que $a \geq 1$

(a) Déterminer un domaine Δ dont l'aire est

$$S(a+h) - S(a)$$

(b) En encadrant ce domaine par deux rectangles, justifier que :

$$\frac{h}{a+h} \leq S(a+h) - S(a) \leq \frac{h}{a}$$

2/ Par un procédé analogue, déterminer un encadrement de $\dfrac{S(a+h) - S(h)}{h}$ lorsque $-1 < h < 0$

3/ Démontrer que la fonction S est dérivable en a et préciser le nombre dérivé $S'(a)$.

Définition 1.

Soit f et F deux fonctions définies sur un intervalle I. On dit que F est une primitive de f sur I si F est dérivable sur I et a pour dérivée la fonction f.
Pour tout réel x de I, $\quad F'(x) = f(x)$.

Appliquer 1.1.2.

1/ La fonction $F : x \mapsto x^3 + 3$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $f : x \mapsto 3x^2$.

Corrigé En effet : F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, on a : $F'(x) = f(x)$.

2/ La fonction $G : x \mapsto \frac{1}{x^2} - 1$ est une primitive sur $]0, +\infty[$ de la fonction $g : x \mapsto -\frac{1}{x}$.

Corrigé En effet : G est dérivable sur $]0, +\infty[$ et pour tout réel $x > 0$, on a : $G'(x) = g(x)$.

1.1.2 Existence de primitives

Activité 1.1.3.

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0, 2]$ par : $f : x \mapsto \begin{cases} 0 & si \quad 0 \leq x < 1 \\ 1 & si \quad 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$

On suppose que f admet une primitive F sur $[0, 2]$ et on pose $a = F(0)$.

1/ Démontrer que :

$$si \quad 0 \leq x < 1 \quad alors \quad F(x) = a$$

$$si \quad 1 \leq x \leq 2 \quad alors \quad F(x) = x + a - 1$$

2/ (a) Étudier la dérivabilité de F en 1.

(b) Conclure.

Activité 1.1.4.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(0) = 0$ et $f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ si $x \neq 0$.

1/ **a)** Démontrer que , pour tout réel $x \neq 0$, $\left|\frac{f(x)}{x}\right| \leq |x|$.

b) En déduire que f est dérivable en 0.

2/ Déterminer la dérivée de la fonction f.

3/ **a)** Démontrer que, pour tout entier $n > 0$, $\left|f'\left(\frac{1}{n\pi}\right)\right| = 1$.

b) En déduire que la fonction f' n'est pas continue en 0 mais admet néamoins une primitive sur $\mathbb{R}$.

Théorème 1.1.5 (Admis).

Si f est continue sur un intervalle I, alors f admet des primitives sur I.

Remarque 1.

Ce théorème donne une condition suffisante pour justifier l'existence des primitives d'une fonction,mais cette condition n'est pas necessaire. Certaines fonction discontinues peuvent admettre des primitives,mais d'autre n'en admettent pas.

1.1.3 Famille des primitives d'une fontion

Activité 1.1.6.

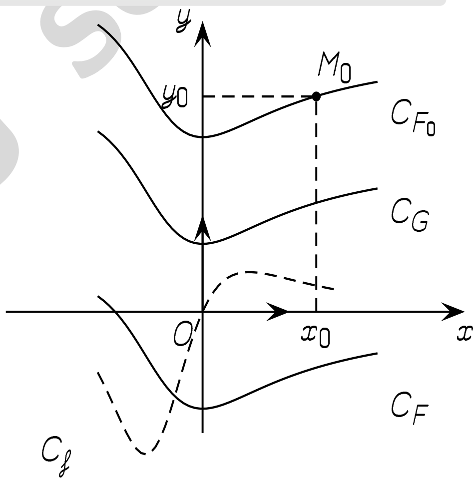
Soit F une primitive de f sur un intervalle I.
Soit G la fonction définie sur I par : $G : x \mapsto F(x) + K$ où K est une constante réelle donnée.
Montrer que G est une primitive de f sur I.

Théorème 1.1.7.

Soit F une primitive de f sur un intervalle I. Toute primitive de f sur I est de la forme :
$x \mapsto F(x) + K$ où K est une constante réelle.

Remarque 2.

- On dit parfois que deux primitives d'une même fonction différent d'une constante.
- **Interprétation graphique** Toutes les courbes se déduisent de $(\mathcal{C}_F)$ par les translations du vecteur $K\vec{j}$ (K réel)



Théorème 1.1.8.

Soit f une fonction admettant des primitives sur un intervalle I.
Étant donné un réel x_0 de I et un réel quelconque y_0, il existe une unique primitive F de f sur I telle que : $F(x_0) = y_0$.

Preuve

Puisque f possède une primitive G sur I alors, les fonctions $F : x \mapsto G(x) + K$ (K réel) sont toutes les primitives de f sur I.
La condition $F(x_0) = y_0$ impose : $K = -G(x_0) + y_0$.
Le résultat énoncé en découle.

1.1.4 Tableaux de primitives

Fonctions usuelles

fonction	primitives	commentaires
$x \mapsto a,\ a \in \mathbb{R}$	$x \mapsto ax + K$	*sur* $\mathbb{R}$
$x \mapsto x^n,\ n \in \mathbb{N}$	$x \mapsto \frac{x^{n+1}}{n+1} + K$	*sur* $\mathbb{R}$
$x \mapsto x^n,\ n \in \mathbb{Z}_-\backslash\{-1\}$	$x \mapsto \frac{x^{n+1}}{n+1} + K$	*sur* $\mathbb{R}^*$
$x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$x \mapsto 2\sqrt{x} + K$	*sur* $]0, +\infty[$
$x \mapsto \cos(ax+b)$	$x \mapsto -a\sin(ax+b)$	*sur* $\mathbb{R}$
$x \mapsto \sin(ax+b)$	$x \mapsto a\cos(ax+b)$	*sur* $\mathbb{R}$
$x \mapsto \dfrac{1}{\cos^2 x}$	$x \mapsto \tan x$	*sur tout intervalle de la forme* $]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi[$

Opérations

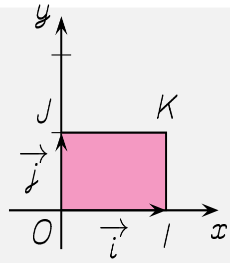
fonction	primitives	commentaires
au', *a réel*	au	
$u' + v'$	$u + v$	
$\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$	
$u'u^n,\ n \in \mathbb{Z} - \{-1\}$	$\dfrac{u^{n+1}}{n+1}$	*sur tout intervalle où* $u \neq 0$ *si* $n < 0$.
$u' \times (v' \circ u)$	$v \circ u$	

1.2 Intégrales

1.2.1 Aire et intégrale d'une fonction positive

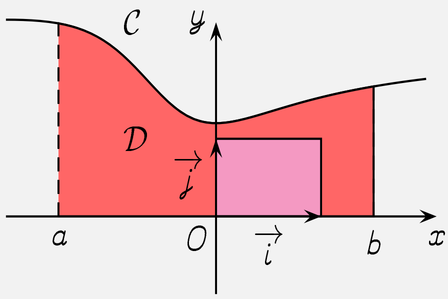
Définition 1.

Le plan est rapporté à un repère orthogonal $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$, on définit les points I, J et K par : $\overrightarrow{OI} = \vec{i}$, $\overrightarrow{OJ} = \vec{j}$ et $OIKJ$ rectangle.
L'aire du rectangle $OIKJ$ définit alors l'unité d'aire (u.a).



Définition 2.

Soit f une fonction **continue** et **positive** sur un intervalle $[a; b]$ et $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans le repère $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$. L'**intégrale de** a **à** b **de** f est le réel noté $\int_a^b f(t)dt$, est égal à l'aire, exprimée en unité d'aire, du domaine $\mathcal{D}$ limité par (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.



a et b sont les *bornes* de l'intégrale et x est une variable muette : n'intervient pas dans le résultat.

Remarque 3.
Nous admettons que : L'aire de $\mathcal{D}$ s'obtient comme limite de sommes d'aires de rectangles de largeurs infinitésimale

$$\int_a^b f(t)dt \text{ se lit aussi “ somme de } a \text{ à } b \text{ de } f(x)dx\text{”}$$

1.2.2 Intégrale d'une fonction négative

Définition

Définition 1.

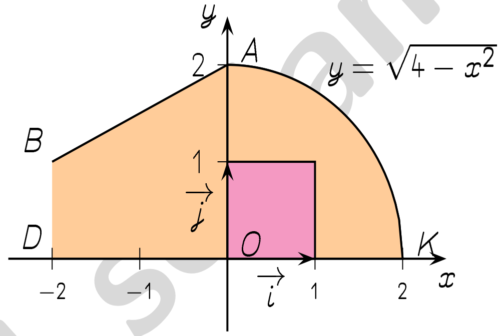
Soit f une fonction **continue** et **négative** sur l'intervalle $[a; b]$.
On définit l'**intégrale** de a à b de f par : $\int_a^b f(t)dt = -\mathscr{A}$ où $\mathscr{A}$ est l'aire du domaine $\mathcal{D}$ délimité par la courbe représentative de f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.

Calcul d'intégrale d'une fonction en calculant des aires

Appliquer 1.2.1.

On considère la fonction f, définie et continue sur l'intervalle $[-2, 2]$, dont la courbe est représentée ci-contre.

Calculer l'intégrale $\int_{-2}^{2} f(t)dt$.



Corrigé

Soit $\mathcal{D}$ le domaine du plan limité par la courbe $(\mathcal{C})$ de f et la droite des abscisses et les droites d'équations $x = -2$ et $x = 2$. L'aire en ua du domaine $\mathcal{D}$ est somme des aires respectives $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}'$ du trapèze $OABD$ et du quart du disque OKA.

$$\mathcal{A} = \int_{-2}^{0} f(t)dt = \frac{2 \times (1+2)}{2} = 3 \text{ et } \mathcal{A}' = \int_0^2 f(t)dt = \frac{1}{4} \times 2^2 \times \pi = \pi$$

$$\text{alors } \int_{-2}^{2} f(t)dt = 3 + \pi$$

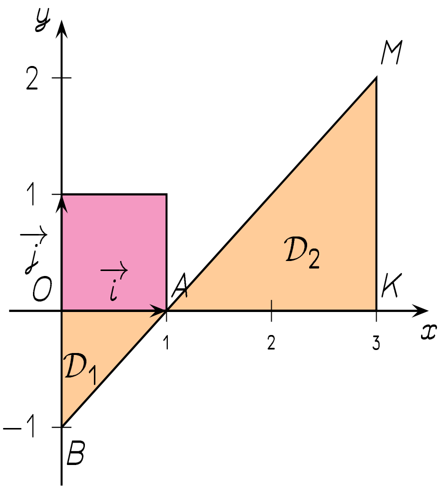
Appliquer 1.2.2.

On considère la fonction f, définie sur $\mathbb{R}$, par :

$$g : x \longmapsto x - 1$$

Calculer les intégrales $a_1 = \int_0^1 g(t)dt$ et $a_2 = \int_1^3 g(t)dt$.

Interpréter la somme $a_1 + a_2$



Corrigé

La fonction g est continue et négative sur $[0, 1]$, l'aire $\mathcal{A}_1$ du domaine $\mathcal{D}_1$ est celle du triangle OAB, d'où :

$$a_1 = -\mathcal{A}_1 = \frac{1 \times 1}{2} = \frac{1}{2}$$

La fonction g est continue et positive sur $[1, 2]$, l'aire $\mathcal{A}_2$ du domaine $\mathcal{D}_2$ est celle du triangle AKM, d'où :

$$a_2 = \mathcal{A}_2 = \frac{2 \times 2}{2} = 2$$

La somme $a_1 + a_2$ en (u.a) l'aire du domaine du plan limité par la courbe de g ,la droite des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 3$.

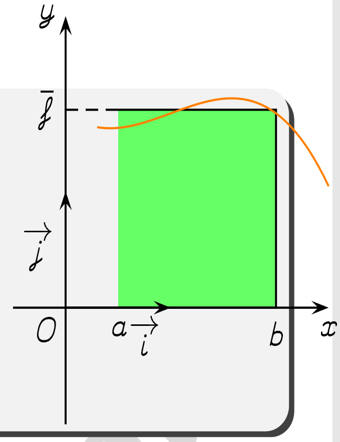
1.2.3 Valeur moyenne

Définition 1.

Soit f une fonction **continue** et **positive** sur un intervalle $[a;b]$ (avec $a<b$). La **valeur moyenne** de f sur $[a;b]$ est le réel

$$\bar{f}=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

$$\bar{f}=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \Leftrightarrow \bar{f}\times(b-a)=\int_a^b f(x)dx$$



Commentaire 1.2.3.
La valeur moyenne de f sur $[a;b]$ est donc le réel $\bar{f}$, tel que le rectangle de dimention $\bar{f}$ et $b-a$ soit de même aire que le domaine délimité par la courbe représentative de f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=a$ et $x=b$.

Appliquer 1.2.4.

Soit i l'intensité d'un courant éléctrique pendant la durée dt, la quantité d'éléctricité transportée par le courant est : $dq=i\,dt$

On suppose que $i\,:\,t\mapsto i\,(t)$ est une fonction continue sur l'intervalle $[t_0,t_1]$, la quantité d'éléctricité transportée par le courant dans l'intervalle $[t_0,t_1]$ est :

$$q\,(t)=\int_{t_0}^{t_1} i\,(t)\,dt$$

Calculons par exemple, la quantité d'éléctricité transportée par le courant, pendant une alternance c'est-à-dire pendant une demi-période, sachant que : $i(t)=I_m\sin(\omega t)$.

Si on désigne par T la période de c e courant alternatif, $T=\dfrac{2\pi}{\omega}$ (si $\omega>0$) et on a :

$$q=\int_0^{\frac{T}{2}} i\,(t)\,dt=\int_0^{\frac{T}{2}} I_m\sin(\omega t)\,dt=\left[-\frac{I_m}{\omega}\cos\omega t\right]_0^{\frac{T}{2}}=\frac{I_m T}{\omega}$$

On note I_e l'**intensité efficace** d'un courant continue qui, dans la même résistance, pendant la même durée T ,on a :

I_e^2 est la moyenne de la fonction $t\mapsto i^2\,(t)$ sur l'intervalle $[0,T]$, soit :

$$I_e^2=\frac{1}{T}\int_0^T i^2\,(t)\,dt=\frac{I_m}{\sqrt{2}}$$

1.2.4 Intégrale et primitive

Définition 1.

Soit f une fonction **continue** sur un intervalle I, soit a, b deux réels de I.
On définit l'intégrale de a à b de f par :

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$$

où F est une primitive quelconque de f sur I.

Notation : On note $F(b) - F(a) = [F(t)]_a^b$, se lit " $F(t)$ entre a et b "

Remarque 4.

La différence $F(b) - F(a)$ ne dépend pas de la primitive de f choisie.

Appliquer 1.2.5.

1/ a, b sont deux réels alors :

$$\int_a^b dx = \int_a^b 1dx = \Big[x\Big]_a^b = b - a$$

2/ λ est une constante réelle, a, b sont deux réels alors :

$$\int_a^b \lambda dx = \Big[\lambda x\Big]_a^b = \lambda \times (b - a)$$

$$\boxed{\text{Si } \lambda \text{ ne dépend pas de } x,\ \int_a^b \lambda dx = \lambda(b-a)}$$

3/ Si f est une fonction dérivable sur un intervalle I telle que f' soit continue sur I, alors pour tous réels $a, b \in I$, on a :

$$\int_a^b f'(t)dt = f(b) - f(a).$$

Appliquer 1.2.6.

– La fonction $f : x \mapsto x^2$ est continue sur $\mathbb{R}$, l'une de ses primitives est $F : x \mapsto \dfrac{x^3}{3}$

d'où $\displaystyle\int_{-1}^2 f(t)dt = F(2) - F(-1) = 3$

– La fonction $g : x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$ est continue sur $]0, +\infty[$, l'une de ses primitives est $G : x \mapsto -\dfrac{1}{x}$

d'où $\displaystyle\int_1^2 g(t)dt = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^2 = G(2) - G(1) = \frac{1}{2}$

Théorème 1.2.7.

Soit f une fonction **continue** sur un intervalle I, soit a un réel de I.
La fonction F définie sur I par $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, est **la primitive** de f sur I qui **s'annule** en a.

Preuve

f est continue sur I, alors elle possède une primitive G sur I, alors :
Pour tout réel x de I, on a : $F(x) = \int_a^x f(t)dt = G(x) - G(a)$
Comme $F(a) = 0$ et $F'(x) = f(x)$ alors F est **la primitive** de f sur I qui **s'annule** en a.

1.2.5 Propriétés de l'intégrale

Relation de Chasles

Théorème 1.2.8.

Soit f une fonction **continue** sur un intervalle I. Pour tous réels a, b et c de I, on a :

$$\int_a^c f(t)dt = \int_a^b f(t)dt + \int_b^c f(t)dt$$

Preuve

Soit F une primitive de f sur I, alors :

$$\begin{aligned}\int_a^b f(t)dt + \int_b^c f(t)dt &= F(b) - F(a) + F(c) - F(b)\\ &= F(c) - F(a)\\ &= \int_a^c f(t)dt\end{aligned}$$

Corrolaire 1.2.9.

Soit f une fonction **continue** sur un intervalle I. Pour tous réels a, b de I, on a :

$$\int_a^a f(t)dt = 0$$

$$\int_a^b f(t)dt = -\int_b^a f(t)dt$$

Linéarité

Théorème 1.2.10.

f et g sont deux fonctions continues sur un intervalle I et soit K une constante réelle.
Pour tous réels a, b de I, on a :

$$\int_a^b (f(t)+g(t))\,dt = \int_a^b f(t)dt + \int_a^b g(t)dt$$
$$\int_a^b K\times f(t)dt = K\times\int_a^b f(t)dt$$

F et G sont deux primitives respectives de f et g sur I, alors :

$$\begin{aligned}\int_a^b (f(t)+g(t))\,dt &= [F(t)+G(t)]_a^b\\ &= F(b)-F(a)+G(b)-G(a)\\ &= \int_a^b f(t)dt + \int_a^b g(t)dt\end{aligned}$$

$$\int_a^b K\times f(t)dt = [K\times F(t)]_a^b = K\times(F(b)-F(a))$$
$$= K\times\int_a^b f(t)dt$$

Preuve

Appliquer 1.2.11.

On considère les intégrales, $A = \int_0^1 \frac{1}{(t+2)^3}dt$ et $B = \int_0^1 \frac{t}{(t+2)^3}dt$

Calculer A puis $2A+B$ puis déduire B.

$$\begin{aligned}A &= \int_0^1 \frac{1}{(t+2)^3}dt = \left[-\frac{1}{2(t+2)^2}\right]_0^1\\ &= \frac{5}{72}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}2A+B &= 2\int_0^1 \frac{1}{(t+2)^3}dt + \int_0^1 \frac{t}{(t+2)^3}dt = \int_0^1 \frac{2+t}{(t+2)^3}dt\\ &= \int_0^1 \frac{1}{(t+2)^2}dt = \left[-\frac{1}{t+2}\right]_0^1 = \frac{1}{6}\end{aligned}$$

On en déduit que $B = \frac{1}{36}$

Corrigé

Appliquer 1.2.12.

1/ En remarquant que $\cos x = \dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$, montrer que :

$$\cos^3 x = \frac{1}{4}\cos 3x + \frac{3}{4}\cos x$$

2/ Calculer alors l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos^3 x dx$

1.2.6 Intégrale et ordre

Positivité

Théorème 1.2.13.

Soit f une fonction **continue** sur $[a;b]$. Si f est **positive** sur $[a;b]$ alors :

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0$$

Dans le cas où $a<b$, et si f ne s'annule qu'en un nombre fini de réels de $[a;b]$, alors :

$$\int_a^b f(x)dx > 0$$

Soit F une primitive de f sur $[a;b]$.
Si f est **positive** sur $[a;b]$ alors F est croissante sur $[a;b]$ d'où

$$F(b)-F(a)\geq 0$$

donc : $\displaystyle\int_a^b f(x)dx \geq 0$.

Si de plus f ne s'annule qu'en un nombre fini de réels de $[a;b]$, alors F est strictement croissante sur $[a;b]$ d'où $F(b)-F(a)>0$ donc : $\displaystyle\int_a^b f(x)dx > 0$.

Preuve

Conservation de l'ordre

Corrolaire 1.2.14.

Soit f et g deux fonctions continues sur l'intervalle $[a;b]$.

Si pour tout réel x de $[a;b]$, $g(x)\leq f(x)$ alors $\displaystyle\int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)dx$

On a $g\leq f$ sur $[a;b]$ alors $f-g\geq 0$ sur $[a;b]$ et par suite $\displaystyle\int_a^b (f(t)-g(t))\,dt \geq 0$ donc $\displaystyle\int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)dx$.

Preuve

Théorème 1.2.15.

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a,b]$ (où a,b sont deux réels tels que $a<b$) alors :

$$\left|\int_a^b f(t)dt\right| \leq \int_a^b |f(t)|dt$$

Preuve

Pour tout réel t de $[a,b]$, on a $-|f(t)| \leq f(t) \leq |f(t)|$ et f est continue sur l'intervalle $[a,b]$, en intégrant membre à membre d'où

$$\left|\int_a^b f(t)dt\right| \leq \int_a^b |f(t)|dt$$

Appliquer 1.2.16.

Pour tout entier naturel n, on pose : $U_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t}dt$.

Montrer que pour tout $n \geq 0$, $U_n \geq 0$.

Montrer que la suite (U_n) est décroissante.

Corrigé

La fonction $t \mapsto \dfrac{t^{n+1}}{1+t}$ est continue et positive sur l'intervalle $[0;1]$ alors $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t}dt \geq 0$. Pour tout réel t de $[0,1]$ et pour tout $n \geq 0$,

$$\frac{t^{n+2}}{1+t} - \frac{t^{n+1}}{1+t} =$$

$$\frac{t^{n+2}}{1+t} - \frac{t^{n+1}}{1+t} = \frac{t^{n+2}-t^{n+1}}{1+t} = \frac{t^{n+1}(t-1)}{1+t}$$

$t \in [0,1] \Rightarrow t-1 \leq 0 \Rightarrow \dfrac{t^{n+1}(t-1)}{1+t} \Rightarrow \dfrac{t^{n+2}}{1+t} \leq \dfrac{t^{n+1}}{1+t}$,

d'où $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^{n+2}}{1+t}dt \leq \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t}dt$ donc $U_{n+1} \leq U_n$.

Inégalités de la moyenne

Théorème 1.2.17.

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a,b]$ (où a,b sont deux réels tels que $a<b$, alors il existe deux réel m et M tel que :

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(t)dt \leq M(b-a)$$

Preuve

f est une fonction continue sur l'intervalle $[a,b]$,alors elle est bornée sur cet intervalle et par la suite il existe deux réels m,M avec

$$m = \inf_{x\in[a,b]} f(x) \text{ et } M = \sup_{x\in[a,b]} f(x)$$

alors, pour tout réel x de $[a,b]$, $m \leq f(x) \leq M$, en intégrant membre à membre, doù :

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(t)dt \leq M(b-a)$$

Preuve

Corrolaire 1.2.18.

a, b deux réels tels que $a < b$. Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a,b]$, alors il existe au moins un réel x_0 de $[a,b]$ tel que $f(x_0) = \overline{f}$.

D'après le théorème précédent, il existe deux réels m, M tel que $m \leq \overline{f} \leq M$, alors d'après le théorème des valeurs intermédiares,il existe au moins un réel x_0 de $[a,b]$ tel que $f(x_0) = \overline{f}$.

Preuve

1.2.7 Intégration par parties

Activité 1.2.19.

A/ Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x\cos x$

1/ (a) Montrer que pour tout réel x, $f'(x) = -2\sin x - f''(x)$

(b) Déduire la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\pi} f(x)dx$

2/ Une deuxième méthode pour calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\pi} f(x)dx$

(a) Vérifier que pour tout réel x, $f(x) = (x\cos x)' - (x)'\cos x$

(b) Déduire la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\pi} f(x)dx$

B/ Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\pi} x\sin x dx$

Théorème 1.2.20.

u, v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I telles que u' et v' sont continues sur I, alors pour tous réels $a, b \in I$, on a :

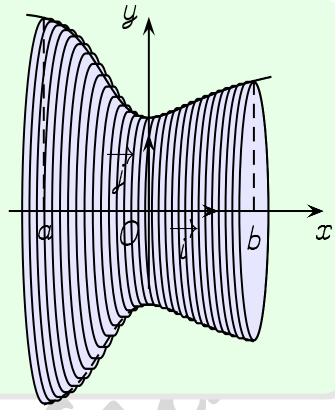
$$\int_a^b u'(t)v(t)dt = \Big[u(t)v(t)\Big]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)dt$$

1.2.8 Calcul de volumes de solides de révolution

Théorème 1.2.21.

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
Soit f une fonction continue et positive sur l'intervalle $[a, b]$.
Le volume $\mathscr{V}$ du solide de révolution engendré par la rotation de l'arc $[\widehat{AB}]$ définie par les points $M(x, y)$ avec $y = f(x)$ et $a \leq x \leq b$ autour de l'axe $(O; \vec{i})$ est égale à :

$$\mathscr{V} = \pi \int_a^b f^2(x)dx$$

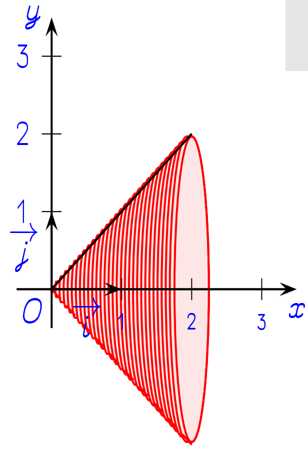


Appliquer 1.2.22.

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
On note $\mathscr{C}$ l'ensemble des points $M(x, y)$ tels que $y = x$ et $0 \leq x \leq 2$.
Calculer le volume $\mathscr{V}$ du solide S obtenu par la rotation de $\mathscr{C}$ autour de l'axe des abscisses.

Corrigé

En unité de volume, on a : $\mathscr{V} = \pi \int_0^2 x^2 dx = \pi \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2 = \frac{8\pi}{3}$



1.2.9 Fonctions définies par une intégrale

Théorème 1.2.23.

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et soit a un réel de I, soit F la fonction définie sur I par : $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, alors :

- F est la primitive de f sur I qui s'annule en a.
- F est une fonction dérivable sur I et pour tout réel $x \in I$, $F'(x) = f(x)$.

Preuve

f est continue sur I, alors elle possède au moins une primitive sur I soit G une primitive de f sur I. a est un réel donné de I, si pour tout réel $x \in I$, $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ alors $F(x) = \Big[G(t)\Big]_a^x = G(x) - G(a)$ donc $F(a) = 0$ et pour tout réel $x \in I$ $F'(x) = G'(x) = f(x)$.

Théorème 1.2.24.

f et u sont deux fonctions, I et J sont deux intervalles et $a \in I$, si :
- f est continue sur I,
- u est dérivable sur J,
- si $x \in J$ alors $u(x) \in J$,

Alors la fonction G définie sur J par $G(x) = \int_a^{u(x)} f(t)dt$ est dérivable sur J et pour tout réel $x \in J$, $G'(x) = u'(x) \times f\Big(u(x)\Big)$

Appliquer 1.2.25.

Pour tout réel $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, on pose : $F(x) = \int_0^{\tan x} \frac{dt}{1+t^2}$

1/ Montrer que F est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, puis calculer $F'(x)$.

2/ Déduire l'expression de $F(x)$ à l'aide de x.

3/ Calculer $F(\frac{\pi}{4})$ puis déduire la valeur de l'intégrale $\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2}$

Corrigé

1/ On note $I = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et $f(t) = \frac{1}{1+t^2}$ et $u(x) = \tan x$, alors :
- f est continue sur $\mathbb{R}$,
- u est dérivable sur I,
- Pour tout $x \in I$ alors $u(x) \in \mathbb{R}$,

Alors F est dérivable sur I et pour tout réel $x \in I$, on a :

$$F'(x) = \Big(\tan x\Big)' \times f(\tan x) = (1+\tan^2 x) \times \frac{1}{1+\tan^2 x} = 1$$

2/ – On a $F(0) = \int_0^{\tan 0} \frac{dt}{1+t^2} = 0$

– $F(0) = 0$ et pour tout $x \in I$, $F'(x) = 1$ alors pour tout réel $x \in I$, $F(x) = x$

3/ on a : $F(\frac{\pi}{4}) = \frac{\pi}{4}$ et d'autre part :

$$F(\frac{\pi}{4}) = \int_0^{\tan\frac{\pi}{4}} \frac{dt}{1+t^2} = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2}$$

donc

$$\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{4}$$

Activité 1.2.26.

Soit I un intervalle centré en 0 (de la forme $[-\alpha, \alpha]$ où $\alpha > 0$)
Soit f une fonction continue sur I et on pose $F(x) = \int_0^x f(t)dt$

1/ Montrer que si f est paire alors F est impaire.

2/ Montrer que si f est impaire alors F est paire.

3/ On suppose que $I = \mathbb{R}$, montrer que :
si f est périodique de péride T alors F est périodique de péride T.

Corrigé

1/ si f est paire alors pour tout réel $x \in I$, $f(x) - f(-x) = 0$, pour montrer que F est impaire, il suffit de montrer que pour tout réel $x \in I$, $F(x) + F(-x) = 0$.
On considère la fonction G définie sur I par : $G(x) = F(x) + F(-x)$.
G est dérivable sur I et pour tout $x \in I$,
$G'(x) = F'(x) - F'(-x) = f(x) - f(-x) = 0$ alors pour tout réel $x \in I$, $G'(x) = 0$.
D'autre part $G(0) = F(0) + F(0) = 0$ donc pour tout réel $x \in I$, $G(x) = 0$

2/ si f est impaire alors pour tout réel $x \in I$, $f(x) + f(-x) = 0$, pour montrer que F est paire, il suffit de montrer que pour tout réel $x \in I$, $F(x) - F(-x) = 0$.
On considère la fonction H définie sur I par : $H(x) = F(x) - F(-x)$.
H est dérivable sur I et pour tout $x \in I$,
$H'(x) = F'(x) + F'(-x) = f(x) + f(-x) = 0$ alors pour tout réel $x \in I$, $H'(x) = 0$.
D'autre part $H(0) = F(0) - F(0) = 0$ donc pour tout réel $x \in I$, $H(x) = 0$

3/ si f est périodique de période T, alors pour tout réel x, $f(x+T) - f(x) = 0$.
Pour montrer que F est périodique de période T, il suffit de montrer que pour tout réel x, $F(x+T) - F(x) = 0 \ldots$

Théorème 1.2.27.

I étant un intervalle centré en 0, $a \in I$ et f est une fonction continue sur I alors :

1/ Si f est paire alors $\int_{-a}^{a} f(t)dt = 0$

2/ Si f est impaire alors $\int_{-a}^{a} f(t)dt = 2\int_0^a f(t)dt$

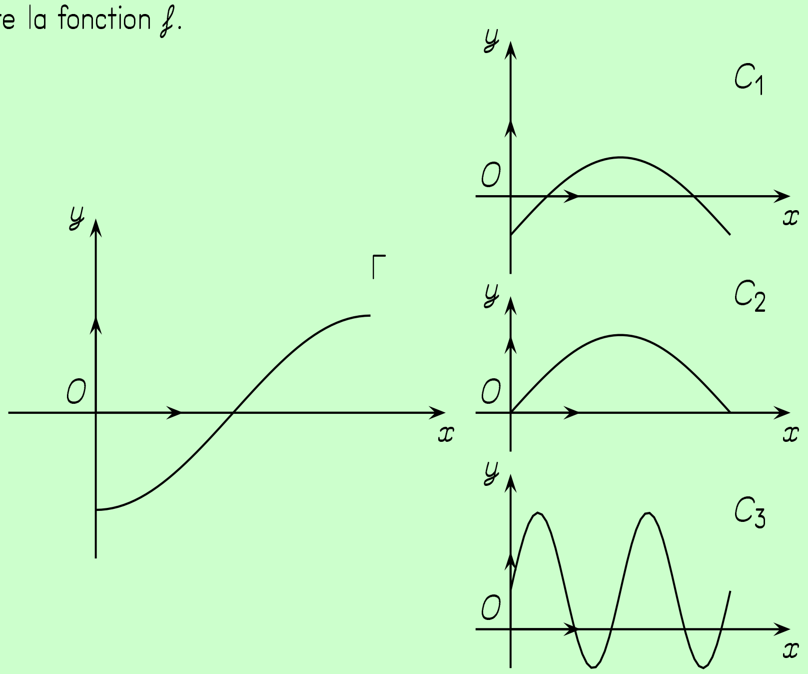
3/ Dans le cas où $I = \mathbb{R}$ et si f est périodique de période T, alors :

$$\int_a^{a+T} f(t)dt = \int_0^T f(t)dt$$

1.3 Exercices corrigés

Exercice 1.

F étant une primitive de la fonction f(supposée dérivable sur son domaine). La courbe Γ représente la fonction F.
Parmi les courbes (C_1),(C_2), (C_3) indiquer celle qui est susceptible de représenter la fonction f. représente la fonction f.



Solution

D'après le graphique F est croissante sur l'intervalle ou elle est définie et comme elle est dérivable alors sa dérivée est positive sur cet intervalle, alors (C_3) est la courbe qui représente f.

Exercice 2.

Soit I un intervalle ouvert centré en 0 et soit f une fonction définie sur I et soit F une primitive de f sur I.

1/ On suppose que $F(0) = 0$. Montrer que :
- Si f est paire alors F est impaire.
- Si f est impaire alors F est paire.

2/ On suppose que $F(0) \neq 0$.
Les propositions a) et b) sont-elles vraie ?

Solution

1/
a) L'intervalle I est ouvert et centré en 0 alors : $(x \in I \Rightarrow -x \in I)$
Pour tout réel x de I,on pose $G(x) = F(x) + F(-x)$
G est dérivable sur I comme étant la somme et composée des fonctions dérivables sur I.
Pour tout réel x de I, on a :
$G'(x) = F'(x) + (-x)'F'(-x)$ or $F' = f$ alors

Solution

$G'(x) = f(x) - f(-x)$ et comme f est paire alors $f(x) - f(-x) = 0$ d'où $G'(x) = 0$.

Pour tout réel x de I, $G'(x) = 0$ et $G(0) = 0$ alors pour tout réel x de I, $G(x) = 0$ donc G est impaire.

b) Pour tout réel x de I,on pose $H(x) = F(x) - F(-x)$

H est dérivable sur I et pour tout réel x de I, on a :

$H'(x) = H'(x) - (-x)'H'(-x)$ or $F' = f$ alors

$H'(x) = f(x) + f(-x)$ et comme f est impaire alors $f(x) + f(-x) = 0$ d'où $H'(x) = 0$.

Pour tout réel x de I, $H'(x) = 0$ et $H(0) = 0$ alors pour tout réel x de I, $H(x) = 0$ donc H est paire.

2/

– La proposition a) est fausse lorsque $F(0) \neq 0$, en effet :

Si on prend $f : x \mapsto x^2$ alors f est paire et soit $F : x \mapsto \frac{1}{3}x^3 + 1$, F est une primitive de f sur R telle que $F(0) \neq 0$ alors F n'est pas impaire

– La proposition b) est fausse lorsque $F(0) \neq 0$, en effet :

Si on prend $f : x \mapsto x$ alors f est impaire et soit $F : x \mapsto \frac{1}{2}x^2 + 1$, F est une primitive de f sur R telle que $F(0) \neq 0$ alors F n'est pas paire.

Exercice 3.

Déterminer la primitive F de f sur l'intervalle I vérifiant la condition indiquée.

a) $f : x \mapsto 3x - 1 + \frac{1}{x^2}$, $I =]0, +\infty[$ et $F(2) = -1$.

b) $f : x \mapsto \left(x^2 + 1\right)^2$, $I = \mathbb{R}$ et $F(0) = 0$.

c) $f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{4 - x}}$, $I =]-\infty, 4[$ et $F(0) = 0$.

d) $f : x \mapsto \tan^2 x$, $I = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et $F(0) = 1$.

e) $f : x \mapsto \sin(2x - \frac{\pi}{6})$,$I = \mathbb{R}$ et $F(0) = 0$.

a) En utilisant les formules suivantes :

fonction	primitives	commentaires
$x \mapsto x^{\alpha}$	$x \mapsto \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + K$	$\alpha \in \mathbb{Z} - \{-1\}$, K est une constante.
$x \mapsto a$	$x \mapsto ax + K$	a, K sont des constantes
$x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$	$x \mapsto -\dfrac{1}{x} + K$	K est une constante.
au'	au	a, K sont des constantes

Une primitive F de f sur I est alors : $F : x \mapsto \dfrac{3}{2}x^2 - x - \dfrac{1}{x} + K$.

$F(2) = -1 \Rightarrow \dfrac{7}{2} + K = -1 \Rightarrow K = -\dfrac{9}{2}$ donc $F : x \mapsto \dfrac{3}{2}x^2 - x - \dfrac{1}{x} - \dfrac{9}{2}$

b) Dans ce cas on doit développer l'expression de $f(x)$, soit : $f(x) = x^4 + 2x^2 + 1$.

Une primitive F de f sur I est alors : $F : x \mapsto \dfrac{1}{5}x^5 + \dfrac{2}{3}x^3 + x + k$.

$F(0) = 0 \Rightarrow k = 0$ donc $F : x \mapsto \dfrac{1}{5}x^5 + \dfrac{2}{3}x^3 + x$.

c) On pourra utiliser la formule :

fonction	primitives	commentaires
$\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u} + K$	K est une constante.
au'	$au + K$	a, K sont des constantes

Pour tout x de I, $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{4-x}} = -\dfrac{(4-x)'}{\sqrt{4-x}}$.

Une primitive F de f sur I est alors : $F : x \mapsto -2\sqrt{4-x} + K$.

$F(0) = 0 \Rightarrow -4 + K = 0 \Rightarrow K = 4$ donc $F : x \mapsto -2\sqrt{4-x} + 4$

d) Pour tout x de I, $f(x) = \tan^2 x = (1 + \tan^2 x) - 1 = (\tan x)' - 1$ alors :
une primitive F de f sur I est alors : $F : x \mapsto \tan x - x + K$ et comme $F(0) = 1$ alors $K = 1$ donc $F : x \mapsto \tan x - x + 1$.

Solution

Exercice 4.

Répondre par VRAI ou FAUX à chaque proposition et justifier la réponse.
Soit f une fonction continue sur un intervalle I et F est une primitive quelconque de f sur I.

1/ Si f est positive sur I alors F est croissante sur I

2/ si f est décroissante sur I, alors F est décroissante sur I.

3/ Si pour tout réel x de I, $f(x) \geq 1$, alors , pour tout réel x de I, $F(x) \geq x$.

Solution

1/ Vrai. $F' = f$ et $f \geq 0$ sur I alors $F' \geq 0$ sur I donc F est croissante

2/ Faux. La fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$ est décroissante sur l'intervalle $I =]0; +\infty[$ alors que sa primitive $F : x \mapsto -\dfrac{1}{x}$ est croissante sur I

3/ Faux. Soit $I = [1; +\infty[$ et $f : x \mapsto x^2$, on a : $f(x) \geq 1$ pour tout réel x de I.

$F : x \mapsto \dfrac{x^3}{3}$ est une primitive de f sur I, et l'inégalité $F(x) \geq x$ est fausse sur I.

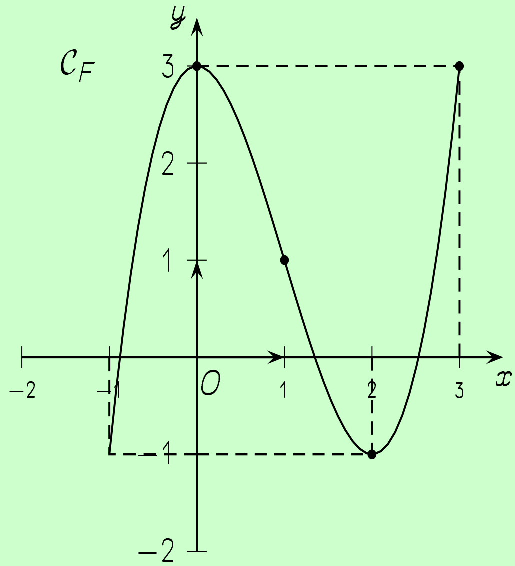
Exercice 5.

La courbe $(\mathcal{C}_F)$ donnée ci-contre représente une primitive d'une fonction f continue sur l'intervalle $[-1; 3]$

1/ Calculer les intégrales suivantes :

$$A = \int_{-1}^{3} f(t)dt \text{ et } B = \int_{-1}^{2} f(t)dt.$$

2/ On note $\left(\mathcal{C}_f\right)$ la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé d'orgine O. Calculer l'aire $\mathcal{A}$ du domaine du plan limité par la courbe $\left(\mathcal{C}_f\right)$ et les droites d'équations $x = -1, x = 0$ et $y = 0$.



Solution

1/

- $A = \displaystyle\int_{-1}^{3} f(t)dt = \Big[F(t)\Big]_{-1}^{3} = F(3) - F(-1)$ or $F(3) = 3$ et $F(-1) = -1$ d'où $A = 4$.
- $B = \displaystyle\int_{-1}^{2} f(t)dt = \Big[F(t)\Big]_{-1}^{2} = F(2) - F(-1)$ or $F(2) = -1$ et $F(-1) = -1$ d'où $B = 2$.

2/ f est continue sur $[-1,0]$ et comme F est croissante sur $[-1,0]$ alors f est positive sur $[-1,0]$.

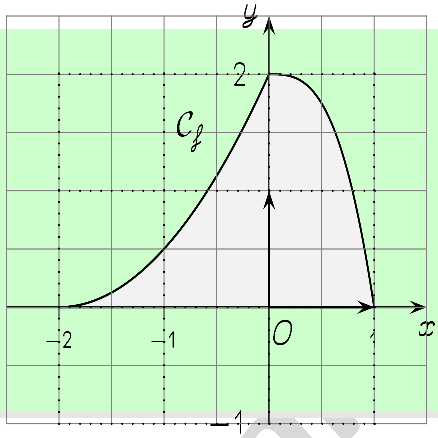
alors :

$$\mathcal{A} = \int_{-1}^{0} \left|f(t)\right| dt = \int_{-1}^{0} f(t)dt = F(0) - F(-1) = 3 - (-1) = 4$$

Exercice 6.

La courbe représentative $\left(\mathcal{C}_f\right)$ donnée ci-contre représente une fonction continue f sur son domaine de définition.
$\mathcal{D}$ étant le domaine du plan limité par $\mathcal{C}_f$ et les droites d'équations $x = -2, x = 1$ et $y = 0$ et on note $\mathcal{A}$ l'aire en unité d'aire du domaine $\mathcal{D}$.

Montrer que $1 \leq \mathcal{A} \leq 4$



Solution

Soit $A(-2,0)$ et $B(0,2)$ et soit $\mathcal{D}_1$ le domaine limité par $\left(\mathcal{C}_f\right)$ et les droites $x = -2, x = 0$ et $y = 0$ alors $aire(\mathcal{D}_1) \leq \text{aire}(OAB)$ donc

$$0 \leq \text{aire}(\mathcal{D}_1) \leq 2. \quad (1)$$

Soit $C(1,0)$ et $K(1,2)$ et soit $\mathcal{D}_2$ le domaine limité par $\left(\mathcal{C}_f\right)$ et les droites $x = 0, x = 1$ et $y = 0$ alors $\text{aire}(OCB) \leq \text{aire}(\mathcal{D}_2) \leq \text{aire}(OCKB)$ donc

$$1 \leq \text{aire}(\mathcal{D}_2) \leq 2. \quad (2)$$

Or $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2$ et $(\mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2 = \varnothing)$ alors $\mathcal{A} = \text{aire}(\mathcal{D}_1) + \text{aire}(\mathcal{D}_2)$
De (1) et (2) on peut conclure que : $1 \leq \mathcal{A} \leq 4$

Exercice 7.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f : x \mapsto \begin{cases} x^2 & si \quad x < 1 \\ (2-x)^2 & si \quad 1 \leq x < 2 \\ 1 - \dfrac{4}{x^2} & si \quad x \geq 2 \end{cases}$

1/ Montrer que f possède une primitive sur $\mathbb{R}$.

2/ Calculer alors l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^3 f(t)dt$.

Solution

1/ $f(1) = (2-1)^2 = 1$
$\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to1^+} (2-x)^2 = 1$ et $\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to1^-} x^2 = 1$ alors $\lim\limits_{x\to1} f(x) = f(1)$ alors f est continie en 1.

$f(2) = 1 - \dfrac{4}{2^2} = 0$

$\lim\limits_{x\to2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to2^+} \left(1 - \dfrac{4}{x^2}\right) = 0$ et $\lim\limits_{x\to2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to2^-} (2-x)^2 = 0$
alors $\lim\limits_{x\to2} f(x) = f(2)$ alors f est continie en 2.

Solution

f est continue sur $\mathbb{R}$ alors elle possède une primitive sur $\mathbb{R}$.

$$2/\ I=\int_0^3 f(t)dt=\int_0^1 f(t)dt+\int_1^2 f(t)dt+\int_2^3 f(t)dt$$

$$\int_0^1 f(t)dt=\int_0^1 t^2dt=\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^1=\frac{1}{3}$$

$$\int_1^2 f(t)dt=\int_1^2 (2-t)^2dt=\left[-\frac{1}{3}(2-t)^3\right]_1^2=\frac{1}{3}$$

$$\int_2^3 f(t)dt=\int_2^3\left(1-\frac{4}{t^2}\right)dt=\left[t+\frac{4}{t}\right]_2^3=\frac{1}{3}$$

Donc $I=1$.

Exercice 8.

Calculer les intégrales :

1/ $\displaystyle\int_{-4}^{4}\left|x^3+x^2-2x\right|dx$

2/ $\displaystyle\int_0^{4\pi}|\sin t|\,dt$

3/ $\displaystyle\int_0^2\frac{t+1}{\left(t^2+2t+2\right)^2}dt$, $\displaystyle\int_0^2 t\sqrt{4+t^2}dt$, $\displaystyle\int_0^2\frac{t}{\sqrt{4+t^2}}dt$, $\displaystyle\int_0^1 t\,(1-t)^6\,dt$

Solution

1/ Soit $f : x\mapsto x^3+x^2-2x$ (cette fonction est ni paire, ni impaire)

$f(x)=x^3+x^2-2x=x\left(x^2+x-2\right)$, le signe de $f(x)$ sur $[-4,4]$ est donné par le tableau suivant

x	-4		-2		0		1		4
x		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
x^2+x-2		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

alors

$$\begin{aligned}\int_{-4}^{4}\left|x^3+x^2-2x\right|dx &= \int_{-4}^{-2}\left(-x^3-x^2+2x\right)dx+\int_{-2}^{0}\left(x^3+x^2-2x\right)dx\\ &\quad+\int_0^2\left(-x^3-x^2+2x\right)dx+\int_2^4\left(-x^3-x^2+2x\right)dx\end{aligned}$$

Une primitive de f est $F : x\mapsto\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3-x^2$, le calcul donne

$$\int_{-4}^{4}\left|x^3+x^2-2x\right|dx=\frac{613}{6}$$

Solution

2/ Soit $f : x \mapsto |\sin x|$ (cette fonction est $\pi -$ périodique)

Nou avons (En appliquant la relation de Chasles)

$$\int_0^{4\pi} f(t)dt = \int_0^{\pi} f(t)dt + \int_{\pi}^{2\pi} f(t)dt + \int_{2\pi}^{3\pi} f(t)dt + \int_{3\pi}^{4\pi} f(t)dt$$

Or $\displaystyle\int_{\pi}^{2\pi} f(t)dt = \int_{\pi}^{\pi+\pi} f(t)dt \underbrace{=}_{f \text{ étant } \pi - \text{périodique}} \int_0^{\pi} f(t)dt$

De même on montre que $\displaystyle\int_{\pi}^{2\pi} f(t)dt = \int_{2\pi}^{3\pi} f(t)dt = \int_{3\pi}^{4\pi} f(t)dt = \int_0^{\pi} f(t)dt$, alors :

$$\int_0^{4\pi} f(t)dt = 4\int_0^{\pi} f(t)dt \underbrace{=}_{\text{Pour tout } t \in [0,\pi],\ \sin t \geq 0} 4\int_0^{\pi} \sin(t)\, dt = 4\left[-\cos t\right]_0^{\pi} = 4 \times 2 = 8$$

3/

a) $\displaystyle\int_0^2 \frac{t+1}{\left(t^2+2t+2\right)^2}dt = \left[-\frac{1}{2\left(t^2+2t+2\right)}\right]_0^2 = \frac{1}{5}$

En écrivant $\displaystyle\frac{t+1}{\left(t^2+2t+2\right)^2} = \frac{1}{2} \times \frac{\left(t^2+2t+2\right)'}{\left(t^2+2t+2\right)^2}$ or une primitive de $\displaystyle\frac{u'}{u^2}$ est $\displaystyle -\frac{1}{u} + K$

b**) En écrivant $t\sqrt{4+t^2} = t\left(4+t^2\right)^{\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2} \times \left(4+t^2\right)'\left(4+t^2\right)^{\frac{1}{2}}$ et une primitive de (lorsque elle existe) $u'u^{\alpha}$ est $\dfrac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + K$ $(\alpha \neq -1)$

D'où $t \mapsto \dfrac{1}{3}\left(4+t^2\right)^{\frac{3}{2}}$ est une primitive de $t \mapsto t\sqrt{4+t^2}$

Donc $\displaystyle\int_0^2 t\sqrt{4+t^2}dt = \left[\frac{1}{3}\left(4+t^2\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^2 = \frac{16}{3}\sqrt{2} - \frac{8}{3}$

c)

$$\int_0^2 \frac{t}{\sqrt{4+t^2}}dt = \frac{1}{2} \times \int_0^2 \frac{2t}{\sqrt{4+t^2}}dt = \frac{1}{2} \times \int_0^2 \frac{\left(4+t^2\right)'}{\sqrt{4+t^2}}dt = \frac{1}{2}\left[2\sqrt{4+t^2}\right]_0^2 = 2\sqrt{2} - 2$$

Solution

d*)

Solution

$$\begin{aligned}\int_0^1 t(1-t)^6\,dt &= \int_0^1 (t-1+1)(1-t)^6\,dt = \int_0^1 \left((t-1)(1-t)^6+(1-t)^6\right)dt\\ &= \int_0^1 (t-1)(1-t)^6\,dt + \int_0^1 (1-t)^6\,dt\\ &= -\int_0^1 (1-t)^7\,dt + \int_0^1 (1-t)^6\,dt\end{aligned}$$

D'autre part $\int_0^1 (1-t)^\alpha\,dt = -\int_0^1 (1-t)'(1-t)^\alpha\,dt = -\left[\frac{(1-t)^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right]_0^1 = \ldots\ (\alpha \neq -1)$

Donc $\int_0^1 t(1-t)^6\,dt = \frac{1}{56}$

Exercice 9.

1/ Calculer l'intégrale $\mathcal{J}(\alpha) = \int_0^1 \frac{t}{(1+t^2)^\alpha}dt$ où α est un entier naturel

2/ On considère les les intégrales $I = \int_0^1 \frac{t}{(1+t^2)^3}dt$ et $J = \int_0^1 \frac{t^3}{(1+t^2)^3}dt$

(a) Calculer l'intégrale I.

(b) Calculer la somme $I+J$ puis déduire la valeur de l'intégrale J.

Solution

1/

$$\begin{aligned}\mathcal{J}(\alpha) &= \int_0^1 \frac{t}{(1+t^2)^\alpha}dt = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2t}{(1+t^2)^\alpha}dt = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\left(1+t^2\right)'}{(1+t^2)^\alpha}dt\\ &\underbrace{\overset{=}{\text{une primitive de } \frac{u'}{u^\alpha} \text{ est } \frac{1}{1-\alpha}\times\frac{1}{u^{\alpha-1}}}} \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1-\alpha}\times\frac{1}{(1+t^2)^{\alpha-1}}\right]_0^1\\ &= \frac{1}{2}\times\frac{2^{1-\alpha}-1}{\alpha-1}\end{aligned}$$

2/

a) En appliquant 1/ pour $\alpha = 3$ alors $I = \int_0^1 \frac{t}{(1+t^2)^3}dt = \frac{3}{16}$

b)

Solution

$$\begin{aligned} I+J &= \int_0^1 \frac{t}{(1+t^2)^3}dt + \int_0^1 \frac{t^3}{(1+t^2)^3}dt = \int_0^1 \left(\frac{t}{(1+t^2)^3} + \frac{t^3}{(1+t^2)^3}\right) dt \\ &= \int_0^1 \frac{t}{(1+t^2)^2}dt \end{aligned}$$

En appliquant le résultat de 1/ pour $\alpha = 2$, alors $\int_0^1 \frac{t}{(1+t^2)^2}dt = \frac{1}{4}$

Nous avons $I = \frac{3}{16}$ et $I + J = \frac{1}{4}$ donc $J = \frac{1}{16}$

Exercice 10.

Soit f la fonction définie sur $[-2,2]$ par : $f : x \mapsto \sqrt{4-x^2}$ et soit $\left(C_f\right)$ sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormé $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$

1/ Montrer que $\left(C_f\right)$ est un demi-cercle de centre O et de rayon 2

2/ Tracer $\left(C_f\right)$.

3/ On note $A = \int_{-2}^{2} \sqrt{4-t^2}dt$ .Interpréter géométriquement A puis donner sa valeur.

Solution

1)

$$M(x,y) \in \left(C_f\right) \Leftrightarrow \begin{cases} y = \sqrt{4-x^2} \\ y \geq 0 \\ x \in [-2,2] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = 4-x^2 \\ y \geq 0 \\ x \in [-2,2] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 + x^2 = 4 \\ y \geq 0 \\ x \in [-2,2] \end{cases}$$

Donc $\left(C_f\right)$ est un demi-cercle de centre O et de rayon 2 (l'inéquation $y \geq 0$ défini le demi-plan formé par les points d'ordonnées positives)

3) A (en unité d'aire) est l'aire de la partie du plan limitée par $\left(C_f\right)$ et les droites d'équations $x = -2$,$x = 2$ et $y = 0$, alors, A est la mesure d'aire du demi-disque de rayon 2, alors

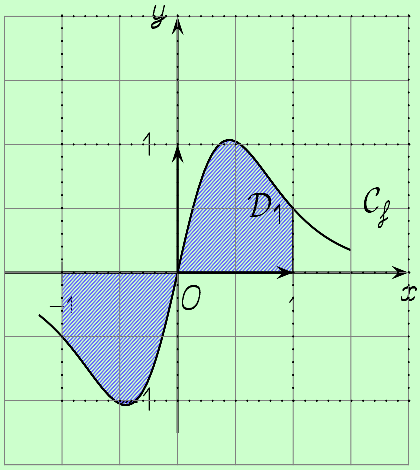
$$A = \int_{-2}^{2} \sqrt{4-t^2}dt = 2\pi$$

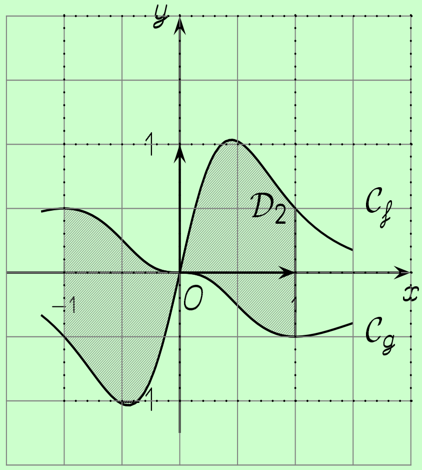
On rappel que l'aire d'un disque de rayon R est πR^2.

Exercice 11.

$$\text{Soient } f : t \mapsto \frac{4t}{(1+t^2)^3} \text{ et } g : t \mapsto \frac{-4t^3}{(1+t^2)^3}.$$

Calculer les aires en unité d'aire de chacun des domaines $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$.





Solution

1/ On note $A(\mathcal{D}_1)$,(en ua) la mesure de l'aire du domaine $\mathcal{D}_1$.

Alors $A(\mathcal{D}_1) = \int_{-1}^{1} |f(t)|\, dt$ la fonction $t \mapsto |f(t)|$ est paire alors :

$$A(\mathcal{D}_1) = \int_{-1}^{1} |f(t)|\, dt = 2\int_0^1 |f(t)|\, dt = 2\int_0^1 f(t)dt$$

$$= 2\left[-\frac{1}{(1+t^2)^2}\right]_0^1 = \frac{3}{2}$$

2/ On note $A(\mathcal{D}_2)$,(en ua) la mesure de l'aire du domaine $\mathcal{D}_2$.

Alors $A(\mathcal{D}_2) = \int_{-1}^{1} |f(t) - g(t)|\, dt$ la fonction $t \mapsto |f(t) - g(t)|$ est paire alors :

$$A(\mathcal{D}_2) = 2\int_0^1 |f(t) - g(t)|\, dt = 2\int_0^1 \left|\frac{4t}{(1+t^2)^2}\right| dt$$

$$= 2\int_0^1 \frac{4t}{(1+t^2)^2} dt = 2\left[-\frac{2}{1+t^2}\right]_0^1 = 2$$

Exercice 12.

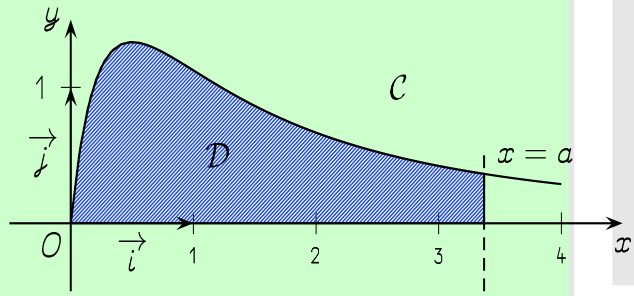
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-\frac{1}{2}\}$ par : $f : x \mapsto \dfrac{9x}{(x+1)^3}$

On note $(\mathcal{C}_f)$ la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$

1/ a) Montrer que pour tout réel x de $\mathbb{R}\backslash\{-\frac{1}{2}\}$, $f(x) = \dfrac{9}{(x+1)^2} - \dfrac{9}{(x+1)^3}$

b) Déterminer une primitive F de f sur l'intervalle $\left]-\frac{1}{2},+\infty\right[$.

2/ On donne dans la figure ci-contre la représentation graphique $(\mathcal{C})$ de la restriction de f sur l'intervalle $[0,+\infty[$, et soit $\mathcal{D}$ le domaine du plan limité par $(\mathcal{C})$ et les droites d'équations $x = 0$,$x = a$ et $y = 0$ où a est un réel strictement positif donné et soit $\mathcal{A}(a)$ l'aire en unité d'aire du domaine $\mathcal{D}$.



a) Exprimer $\mathcal{A}(a)$ au moyen d'une intégrale.

b) Calculer $\mathcal{A}(a)$ en fonction de a puis vérifier que $\lim\limits_{a\to+\infty} \mathcal{A}(a) = \dfrac{9}{2}$.

c) Interpréter graphiquement le résultat obtenu

Solution

1/a) Pour tout réel x de $\mathbb{R}\backslash\{-\frac{1}{2}\}$, on a :

$$\frac{9}{(x+1)^2} - \frac{9}{(x+1)^3} = \frac{9(x+1)}{(x+1)^3} - \frac{9}{(x+1)^3} = \frac{9x}{(x+1)^3}$$

Une primitive de $u : x \mapsto \dfrac{9}{(x+1)^2}$ est $U : x \mapsto -\dfrac{9}{x+1}$,

Une primitive de $v : x \mapsto \dfrac{9}{(x+1)^3}$ est $V : x \mapsto -\dfrac{9}{2\,(x+1)^2}$

alors une primitive de f est $F : x \mapsto \dfrac{9}{2\,(x+1)^2} - \dfrac{9}{x+1} + K$.

2/

a) f est positive et continue sur l'intervalle $[0,a]$ alors : $\mathcal{A}(a) = \displaystyle\int_0^a f(t)dt$.

b)

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(a) &= \int_0^a f(t)dt = F(a) - F(0)\\ &= \frac{9}{2}\frac{a^2}{(a+1)^2}\end{aligned}$$

Solution

$$\lim_{a\to+\infty} \mathcal{A}(a) = \lim_{a\to+\infty} \frac{9}{2}\frac{a^2}{(a+1)^2} = \frac{9}{2}$$

c) Le domaine $\mathcal{D}$ lorsque a est assez grand est un domaine infini dont la mesure de son aire est finie.

Exercice 13.

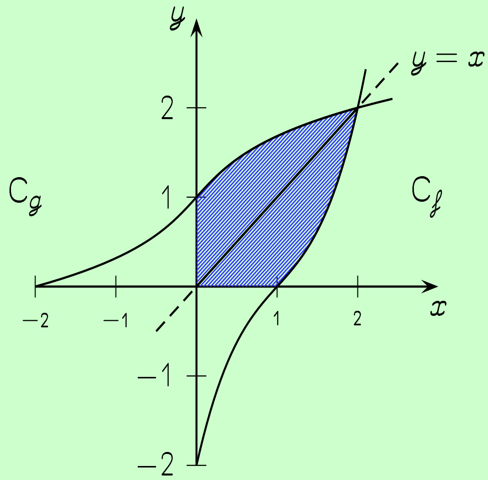
On considère la fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par $f : x \mapsto (x-1)^3 + x - 1$ et on note (C_f) sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormé $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$

1/ Montrer que f possède une fonction réciproque g définie et dérivable sur un intervalle I que l'on précisera.

2/ On note (C_g) la courbe représentative de g et par $\mathcal{D}$ le domaine du plan limité par les courbes $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{C}_g)$ et les axes du repère et soit $\mathcal{A}$ l'aire en unité d'aire du domaine $\mathcal{D}$.

a) Vérifier que $\mathcal{A} = 4 - 2\displaystyle\int_1^2 f(x)dx$.

b) Calculer $\mathcal{A}$



Solution

1/ f est dérivable sur $[0,+\infty[$ et pour tout réel $x \geq 0$, $f'(x) = 3(x-1)^2 + 1$.

Pour tout $x \geq 0$, $f'(x) > 0$ alors f est strictement croissante sur $[0,+\infty[$.

f est strictement croissante sur $[0,+\infty[$ alors elle possède une fonction réciproque g définie sur $f([0,+\infty[)$.

Comme f est continue alors $f([0,+\infty[) = \left[f(0), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right[= [-2,+\infty[$.

f est dérivable sur $[0,+\infty[$ et pour tout $x \geq 0$, $f'(x) \neq 0$ alors g est dérivable sur $f([0,+\infty[) = [-2,+\infty[$.

2/

a) On considère

– le carré $OABC$ où $A(2,0)$, $B(2,2)$ et $C(0,2)$

– Le domaine $\mathcal{D}$ du plan limité par $\left(C_f\right)$ et les droites $x=1, x=2, y=0$.

– Le domaine $\mathcal{D}\prime$ du plan limité par $\left(C_g\right)$ et les droites $x=0, x=2, y=2$.

Alors $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont symétriques donc ils ont la même mesure d'aire alors :

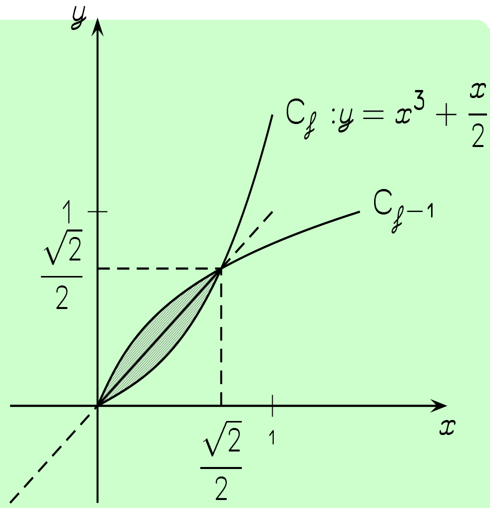
$\mathcal{A} = \text{aire}(OABC) - 2\,\text{aire}(\mathcal{D})$ et $\text{aire}(\mathcal{D}) = \displaystyle\int_1^2 f(t)dt$ (puisque $f \geq 0$ sur $[1,2]$)

Donc $\mathcal{A} = 4 - 2\displaystyle\int_1^2 f(t)dt$

b) $\mathcal{A} = \dfrac{5}{2}\ (ua)$

Exercice 14.

On considère la fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par $f : x \mapsto x^3 + \frac{x}{2}$ et on note (C_f) sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$



1/ Montrer que f possède une fonction réciproque f^{-1} définie et dérivable sur un intervalle I que l'on précisera.

2/ Etudier la position relative entre (C_f) et la droite dont une équation cartésienne $y = x$.

3/ On donne dans la figure ci-contre les courbes (C_f) et $(C_{f^{-1}})$.Calculer en unité d'aire l'aire du domaine coloré $\mathcal{D}$

Exercice 15.

On rappel que : $\cos x = \dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$ et $\sin x = \dfrac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$

Developper $\cos^3 x$ et $\sin^3 x$ puis vérifier que :

$$\cos^3 x = \frac{1}{4}\cos 3x + \frac{3}{4}\cos x \quad \text{et} \quad \sin^3 x = \frac{3}{4}\sin x - \frac{1}{4}\sin 3x$$

Calculer alors les intégrales $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos^3 x dx$ et $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin^3 x dx$

Solution

$$\begin{aligned}\cos^3 x &= \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}e^{3(ix)} + \frac{3}{8}e^{ix} + \frac{3}{8}e^{-ix} + \frac{1}{8}e^{-3(ix)} \\ &= \frac{1}{4}\left(\frac{e^{3xi}+e^{-3xi}}{2}\right) + \frac{3}{4}\left(\frac{e^{xi}+e^{-xi}}{2}\right) = \frac{1}{4}\cos 3x + \frac{3}{4}\cos x\end{aligned}$$

De même on trouve $\sin^3 x = \frac{3}{4}\sin x - \frac{1}{4}\sin 3x$

$$\int_0^{\pi} \cos^3 x dx = \int_0^{\pi}\left(\frac{1}{4}\cos 3x + \frac{3}{4}\cos x\right)dx = \left[\frac{1}{12}\sin 3x + \frac{3}{4}\sin x\right]_0^{\pi} = 0$$

$$\int_0^{\pi} \sin^3 x dx = \int_0^{\pi}\left(\frac{3}{4}\sin x - \frac{1}{4}\sin 3x\right)dx = \left[-\frac{3}{4}\cos x + \frac{1}{12}\cos 3x\right]_0^{\pi} = \frac{4}{3}$$

Exercice 16.

1/ À l'aide d'une intégration par parties calculer les intégrales : $\int_0^{\pi} x\cos x dx$ et $\int_0^{\pi} x\sin x dx$

2/ À l'aide d'une double intégration par parties calculer les intégrales :

$$\int_0^{\pi} x^2\cos x dx \text{ et } \int_0^{\pi} x^2\sin x dx$$

Solution

1/

a) On pose $\begin{cases} u(x)=x \text{ alors } u'(x)=1 \\ v'(x)=\cos x \text{ soit } v(x)=\sin x \end{cases}$

Les fonctions u,v sont dérivables et u',v' sont continues sur $[0,\pi]$ alors :

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} x\cos x dx &= [x\sin x]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \sin x\, dx \\ &= -\int_0^{\pi} \sin x\, dx = -[-\cos x]_0^{\pi} = -2 \end{aligned}$$

b) On pose $\begin{cases} u(x)=x \text{ alors } u'(x)=1 \\ v'(x)=\sin x \text{ soit } v(x)=-\cos x \end{cases}$

Les fonctions u,v sont dérivables et u',v' sont continues sur $[0,\pi]$ alors :

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} x\sin x dx &= [-x\cos x]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} (-\cos x)\, dx \\ &= \pi + \int_0^{\pi} \cos x\, dx = \pi + [\sin x]_0^{\pi} = \pi \end{aligned}$$

2/ En posant :

On pose $\begin{cases} u(x)=x^2 \text{ alors } u'(x)=2x \\ v'(x)=\cos x \text{ soit } v(x)=\sin x \end{cases}$

Les fonctions u,v sont dérivables et u',v' sont continues sur $[0,\pi]$ alors :

$\int_0^{\pi} x^2\cos x dx = \left[x^2\sin x\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} 2x\sin x dx = -2\int_0^{\pi} x\sin x\, dx$

L'intégrale $\int_0^{\pi} x\sin x\, dx = \pi$ donc $\int_0^{\pi} x^2\cos x dx = -2\pi$.

Exercice 17.

On considère les intégrales $I=\int_0^1 \frac{dt}{t^2+t+1}$ et $J=\int_0^1 \frac{t}{t^2+t+1}dt$

1/ Soit f la fonction définie sur $[0,1]$ par : $f: t \mapsto \frac{1}{t^2+t+1}$

(a) Montrer que f est décroissante sur $[0,1]$.
(b) Tracer (C) la courbe représentative de f.
(c) Interpréter graphiquement l'intégrale I.
(d) En utilisant la méthode des rectangles et en partageant l'intervalle $[0,1]$ en cinq intervalles de même amplitude donner un encadrement de l'intégrale I.

2/ Soit g la fonction définie sur $[0,1]$ par : $g: t \mapsto \frac{t}{t^2+t+1}$

(a) Montrer que g est décroissante sur $[0,1]$.
(b) Tracer (C') la courbe représentative de g.
(c) Interpréter graphiquement l'intégrale J.
(d) En utilisant la méthode des rectangles et en partageant l'intervalle $[0,1]$ en cinq intervalles de même amplitude donner un encadrement de l'intégrale J.

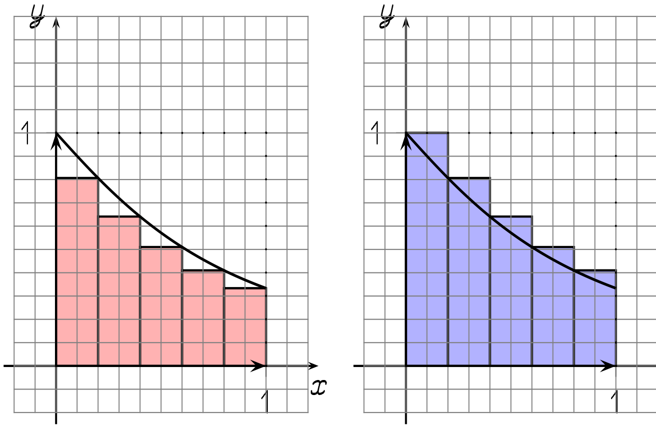
Solution

1/a) f est dérivable sur $[0,1]$ et pour tout t de $[0,1]$, on a :

$$f'(t)=-\frac{2t+1}{\left(t^2+t+1\right)^2}$$

Pour tout t de $[0,1]$, on a : $f'(t)<0$ alors f est décroissante sur $[0,1]$

b) Voir figure



c) En unité d'aire I c'est la mesure d'aire de la partie du plan délimitée par la courbe (C) et les droite d'équations $x=0$, $x=1$ et $y=0$.

On a :

$$\begin{array}{c} 0 \leq x \leq 0.2 \\ 0.2 \leq x \leq 0.4 \\ 0.4 \leq x \leq 0.6 \\ 0.6 \leq x \leq 0.8 \\ 0.8 \leq x \leq 1 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} f(0.2) \leq f(x) \leq f(0) \\ f(0.4) \leq f(x) \leq f(0.2) \\ f(0.6) \leq f(x) \leq f(0.4) \\ f(0.8) \leq f(x) \leq f(0.6) \\ f(1) \leq f(x) \leq f(0.8) \end{array} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{5}(f(0.2)+f(0.4)+f(0.6)+f(0.8)+f(1)) &\leq I \leq \frac{1}{5}(f(0)+f(0.2)+f(0.4)+f(0.6)+f(0.8)) \Rightarrow \\ 0.5 &\leq I \leq 0.6 \end{aligned}$$

2/a) g est dérivable sur $[0,1]$ et pour tout t de $[0,1]$, on a : $g'(t) = \dfrac{1-t^2}{(t^2+t+1)^2}$

Pour tout t de $[0,1]$, on a : $f'(t) \geq 0$ alors f est croissante sur $[0,1]$

b) Voir figure

c) En unité d'aire J c'est la mesure d'aire de la partie du plan délimitée par la courbe (C') et les droite d'équations $x = 0$,$x = 1$ et $y = 0$.

On a :

$$\begin{array}{c} 0 \leq x \leq 0.2 \\ 0.2 \leq x \leq 0.4 \\ 0.4 \leq x \leq 0.6 \\ 0.6 \leq x \leq 0.8 \\ 0.8 \leq x \leq 1 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} g(0) \leq g(x) \leq g(0.2) \\ g(0.2) \leq g(x) \leq g(0.4) \\ g(0.4) \leq g(x) \leq g(0.6) \\ g(0.6) \leq g(x) \leq g(0.8) \\ g(0.8) \leq g(x) \leq g(1) \end{array} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{5}(g(0)+g(0.2)+g(0.4)+g(0.6)+g(0.8)) &\leq J \leq \frac{1}{5}(g(0.2)+g(0.4)+g(0.6)+g(0.8)+g(1)) \\ 0.21 &\leq J \leq 0.27 \end{aligned}$$

Solution

Exercice 18.

Pour tout entier naturel non nul n , on pose : $U_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{t^2+t+1}dt.$

1/ a) Montrer que pour tout $n \geq 1$, $U_n \geq 0$.

b) Montrer que la suite (U_n) est décroissante.

c) Déduire que (U_n) est convergente.

2/ a) n étant un entier naturel supérieur ou égal à 1 et t étant un réel de $[0,1]$, montrer que :

$$\frac{t^n}{t^2+t+1} \leq t^n$$

b) Déduire que pour tout $n \geq 1$, $U_n \leq \dfrac{1}{n+1}$.

c) Calculer alors $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$.

1/a) Pour tout $n \geq 1$,la fonction $f : t \mapsto \dfrac{t^n}{t^2+t+1}$ est continue et positive sur l'intervalle $[0,1]$ alors $\displaystyle\int_0^1 f(t)dt \geq 0$.

$$\text{Donc pour tout } n \geq 1,\ U_n \geq 0.$$

b) Soit $n \geq 1$, n entier, alors :

$$\begin{aligned} U_{n+1} - U_n &= \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{t^2+t+1}dt - \int_0^1 \frac{t^n}{t^2+t+1}dt \\ &= \int_0^1 \left(\frac{t^{n+1}}{t^2+t+1} - \frac{t^n}{t^2+t+1}\right) dt \\ &= \int_0^1 \left(\frac{t^n}{t^2+t+1}(t-1)\right) dt \end{aligned}$$

Or $t \in [0,1]$ donc $\dfrac{t^n}{t^2+t+1} \geq 0$ et $t-1 \leq 0$ par suite $\dfrac{t^n}{t^2+t+1}(t-1) \leq 0$ donc :

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left(\frac{t^n}{t^2+t+1}(t-1)\right) dt &\leq 0 \\ U_{n+1} - U_n &\leq 0 \end{aligned}$$

La suite (U_n) est donc décroissante.

c) (U_n) est décroissante et minorée (par zéro) alors elle est convergente.

2/a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $t \in [0,1]$ alors :

$t^2+t \geq 0 \Rightarrow t^2+t+1 \geq 1 \Rightarrow \dfrac{1}{t^2+t+1} \leq 1$ et comme $t^n \geq 0$ alors $0 \leq \dfrac{t^n}{t^2+t+1} \leq t^n$

b) Nous avons, pour tout $t \in [0,1]$, $0 \leq \dfrac{t^n}{t^2+t+1} \leq t^n$

(les fonctions $t \mapsto \dfrac{t^n}{t^2+t+1}$ et $t \mapsto t^n$ sont continues sur $[0,1]$) alors

$$0 \leq \int_0^1 \frac{t^n}{t^2+t+1}dt \leq \int_0^1 t^n dt$$

Par ailleurs $\displaystyle\int_0^1 t^n dt = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_{t=0}^{t=1} = \frac{1}{n+1}$ donc : $0 \leq U_n \leq \dfrac{1}{n+1}$

c) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $0 \leq U_n \leq \dfrac{1}{n+1}$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} U_n = 0$.

Solution

Exercice 19.

Pour tout entier naturel n , on pose : $U_n = \int_0^1 \frac{t^{2n+1}}{(t^2+1)^3} dt$.

1/
a) Calculer U_0.
b) Calculer $U_0 + U_1$ puis déduire la valeur de U_1.
2/
a) Montrer que (U_n) est décroissante
b) Montrer que (U_n) est convergente.
3/ a) Montrer que pour tout naturel n, $U_n \leq \frac{1}{2n+2}$.
b) Calculer $\lim_{n \to +\infty} U_n$.

Solution

1/ a)

$$U_0 = \int_0^1 \frac{t}{(t^2+1)^3} dt = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{\left(t^2+1\right)'}{(t^2+1)^3} dt$$

$$= \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{2\left(t^2+1\right)^2} \right]_0^1 = \frac{3}{16}$$

b)

$$\begin{aligned} U_0 + U_1 &= \int_0^1 \frac{t}{(t^2+1)^3} dt + \int_0^1 \frac{t^3}{(t^2+1)^3} dt = \int_0^1 \frac{t+t^3}{(t^2+1)^3} dt \\ &= \int_0^1 \frac{t\left(1+t^2\right)}{(t^2+1)^3} dt = \int_0^1 \frac{t}{(t^2+1)^2} dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{\left(t^2+1\right)'}{(t^2+1)^2} dt = \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{t^2+1} \right]_0^1 = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} U_0 + U_1 = \frac{1}{4} \\ U_0 = \frac{3}{16} \end{cases} \Rightarrow U_1 = \frac{1}{16}$$

2/ a) Soit n un entier naturel alors :

$$U_{n+1} - U_n = \int_0^1 \frac{t^{2n+3}}{(t^2+1)^3} dt - \int_0^1 \frac{t^{2n+1}}{(t^2+1)^3} dt$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{t^{2n+3}}{(t^2+1)^3} - \frac{t^{2n+1}}{(t^2+1)^3} \right) dt = \int_0^1 \left(\frac{t^{2n+1}}{(t^2+1)^3} (t^2-1) \right) dt$$

Pour tout $t \in [0,1]$, on a : $\frac{t^{2n+1}}{(t^2+1)^3} \geq 0$ et $t^2 - 1 \leq 0$ d'où $\frac{t^{2n+1}}{(t^2+1)^3}(t^2-1) \leq 0$ donc

Solution

(L'intégrale d'une fonction continue et négative sur un intervalle est un réel négatif)

$$U_{n+1} - U_n \leq 0.$$

La suite (U_n) est donc décroissante.

b) Pour tout naturel n et pour tout réel t de l'intervalle $[0,1]$, $\dfrac{t^{2n+1}}{(t^2+1)^3} \geq 0$ donc $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^{2n+1}}{(t^2+1)^3}dt \geq 0$ donc la suite (U_n) est minorée et comme elle est décroissante alors elle est convergente.

3/ a) Pour tout naturel n et pour tout réel t de l'intervalle $[0,1]$, on a : :

$t^2+1 \geq 1 \Rightarrow \left(t^2+1\right)^3 \geq 1 \Rightarrow 0 < \dfrac{1}{(t^2+1)^3} \leq 1$ et comme $t^{2n+1} \geq 0$ alors :

$$0 < \frac{t^{2n+1}}{(t^2+1)^3} \leq t^{2n+1} \text{ d'où } 0 < U_n \leq \int_0^1 t^{2n+1}dt \text{ et}$$

$$\int_0^1 t^{2n+1}dt = \left[\frac{t^{2n+2}}{2n+2}\right]_{t=0}^{t=1} = \frac{1}{2n+2}.$$

b) Pour tout entier $n \geq 0$, on a :

$0 < U_n \leq \dfrac{1}{2n+2}$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2n+2} = 0$ alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} U_n = 0$.

Exercice 20.

Pour tout entier naturel n , on pose : $U_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{2n} t dt$.

1/

a) Calculer U_0.

b) Calculer $U_0 + U_1$ puis déduire la valeur de U_1.

2/

a) Montrer que (U_n) est décroissante

b) Montrer que (U_n) est convergente.

3/ a) Montrer que pour tout naturel n, $U_{n+1} + U_n = \dfrac{1}{2n+1}$.

b) Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} U_n$.

Solution

1/a) $U_0 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^0 t dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} dt = \frac{\pi}{4}$.

b)

$U_0 + U_1 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} dt + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 t dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(1+\tan^2 t\right) dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan t)' dt = \tan\frac{\pi}{4} - \tan 0 = 1$

$U_0+U_1=1$ et $U_0=\frac{\pi}{4}$ donc $U_1=1-\frac{\pi}{4}$.

2/a) Soit n un entier naturel alors :

$$\begin{aligned} U_{n+1}-U_n &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{2n+2} t dt - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{2n} t dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\tan^{2n+2} t - \tan^{2n} t\right) dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{2n} t \left(\tan^2 t - 1\right) dt \end{aligned}$$

or $t \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ alors $0 \le \tan t \le 1$ d'où $\tan^2 t - 1 \le 0$ et $\tan^{2n} t \ge 0$.

d'où $\tan^{2n} t\left(\tan^2 t - 1\right) \le 0$ et par suite $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{2n} t \left(\tan^2 t - 1\right) dt \le 0$ donc (U_n) est décroissante.

Pour tout naturel n et pour tout réel $t \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$,on a : $\tan^{2n} t \ge 0$ donc $U_n \ge 0$ donc (U_n) est minorée donc elle est convergente (puisque elle est décroissante)

3/a) Pour tout entier naturel n on a :

$$U_{n+1}+U_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{2n+2} t dt + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{2n} t dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1+\tan^2 t) \tan^{2n} t dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan t)' \tan^{2n} t dt = \left[\frac{\tan^{2n+1} t}{2n+1}\right]_{t=0}^{t=\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2n+1}$$

b) On sait que (U_n) est convergente, soit ℓ sa limite alors (U_{n+1}) converge aussi vers ℓ et d'après la relation précédente on en déduit que $2\ell = 0$ donc $\ell = 0$.

Solution

Exercice 21.

On considère la fonction F définie sur l'intervalle $[0, +\infty[$ par : $F(x) = \int_0^x \sqrt{1+t+t^2} dt$

On note par (C) la courbe représentative de F dans un repère orthonormé $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$

1/ Montrer que F est dérivable sur $[0, +\infty[$ puis calculer $F'(x)$ pour tout $x \ge 0$.

2/ (a) Montrer que pour tout réel $t \ge 0$, $\sqrt{1+t+t^2} > t$

(b) Déduire que pour tout réel $x \ge 0$, $F(x) \ge \frac{x^2}{2}$. Quelle est la nature de la branche infinie de (C) en $+\infty$.

3/ (a) Montrer que pour tout réel $t \ge 0$, $\sqrt{1+t+t^2} > 1$

(b) Déduire que pour tout réel $x \ge 0$, $F(x) \ge x$.

(c) Préciser la position de (C) par rapport à sa demi-tangente au point d'abscisse nulle.

4/ Tracer (C).

on donne $F(0.5) \simeq 0.57$, $F(1) \simeq 1.33$, $F(2) \simeq 3.5$.

Exercice 22.

On considère la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par : $F(x) = \int_0^x \frac{dt}{4+t^2}$.

On note par (C) la courbe représentative de F dans un repère orthonormé $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$

1/ Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}$ puis calculer $F'(x)$ pour tout réel x.

2/ Montrer que F est impaire.

3/ (a) Montrer que pour tout réel $t \geq 1$, $\frac{1}{4+t^2} \leq \frac{1}{t^2}$.

(b) En remarquand que $F(t) = F(1) + \int_1^x \frac{dt}{4+t^2}$ montrer que :

Pour tout réel $t \geq 1$, $F(t) \leq F(1) + \int_1^x \frac{dt}{t^2}$

(c) Montrer que F est majorée sur $[0, +\infty[$ puis qu'elle possède une limite finie ℓ en $+\infty$.

4/ On admettra que $\ell = \frac{\pi}{4}$.

5/ (a) Donner le tableau de variation de F.

(b) Ecrire une équartion cartésienne de la tangente T à (C) au point 0.

6/ En utilisant la méthode des rectangles et en partagant l'intervalle d'intégration en 4 intervalles de même longueurs donner un encadrement de chacune des intégrales :

$$A = \int_0^1 \frac{dt}{t^2+4},\ B = \int_0^2 \frac{dt}{t^2+4}$$

7/ Tracer T et (C).

Exercice 23.

Pour tout réel de l'intervalle $I = \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$, on pose : $F(x) = \int_0^{1+\tan x} \frac{dt}{t^2-2t+2}$.

1/ (a) Montrer que F est dérivable sur I.

(On pourra écrire F à l'aide d'une primitive de la fonction $f : t \mapsto \frac{1}{t^2-2t+2}$)

(b) Calculer $F(-\frac{\pi}{4})$ et $F'(x)$ pour tout réel x de I.

(c) Déduire l'expression de $F(x)$ pour tout réel x de I.

2/ Calculer les intégrales :

$$A = \int_0^1 \frac{dt}{t^2-2t+2},\ B = \int_0^2 \frac{dt}{t^2-2t+2}$$

Solution

1/a) La fonction $f : t \mapsto \dfrac{1}{t^2-2t+2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ alors elle possède une seule primitive G sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0.
Alors pour tout réel x de I,on a :

$$F(x) = \int_0^{1+\tan x} \frac{dt}{t^2-2t+2} = \Big[G(t)\Big]_0^{1+\tan x} = G(1+\tan x)$$

F est alors la composée de G et $u : x \mapsto 1+\tan x$.

$$\left\{\begin{array}{c} u \text{ est dérivable sur } I \\ \text{Pour tout } x \text{ de } I,\ u(x) \in \mathbb{R} \\ G \text{ est dérivable sur } \mathbb{R} \end{array}\right. \quad \text{alors } F = G \circ u \text{ est dérivable sur } I.$$

b) $F(-\frac{\pi}{4}) = G\left(1+\tan(-\frac{\pi}{4})\right) = G(1-1) = G(0) = 0$
Pour tout réel x de I,

$$\begin{aligned} F'(x) &= (1+\tan x)' \times G'(x) = (1+\tan^2 x) \times f(1+\tan x) \\ &= (1+\tan^2 x) \times \frac{1}{(1+\tan x)^2 - 2(1+\tan x)+2} \\ &= 1 \end{aligned}$$

c) $F'(x) = 1$ sur I alors $F(x) = x+K$ sur I et comme $F(-\frac{\pi}{4}) = 0$ alors $-\frac{\pi}{4}+K = 0$ donc $K = \frac{\pi}{4}$.

$$\text{Pour tout réel } x \text{ de } I, \text{ on a : } F(x) = x + \frac{\pi}{4}$$

2/

$$\begin{aligned} A &= \int_0^1 \frac{dt}{t^2-2t+2} = \int_0^{1+\tan 0} \frac{dt}{t^2-2t+2} = F(0) \\ &= \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= \int_0^2 \frac{dt}{t^2-2t+2} = \int_0^{1+\tan\frac{\pi}{4}} \frac{dt}{t^2-2t+2} = F(\frac{\pi}{4}) = \frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4} \\ &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$